Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 5 — 1950. — No. 1

Zagreb 1950

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

SADRŽAJ

»Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, glasilo Društva matematičara i fizičara N. R. H., izlazi godišnje u pet brojeva po tri štampana arka. Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na upravu Hrvatskog prirodoslovnog društva, Ilica 16/III, ili poštanskim čekom Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Hrvatske broj 401-9533139. Glavni i odgovorni urednik: Đuro Kurepa. Redakcioni odbor: S. Bilinski, D. Blanuša, J. Goldberg, Đ. Kurepa, B. Marković, I. Supek, S. Škreblin i R. Vernić. Tehnički urednik: S. Bilinski. Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta broj 31.

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO
SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.
T. 5 — 1950

Zagreb 1950

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1950 | T. 5 / No. 1

O NOŽIŠNIM PLOHAMA ROTACIONOG PARABOLOIDA

Dr. Vilko Niče, Zagreb

Svakim pravcem u prostoru možemo na neku plohu 2. reda postaviti dvije tangencijalne ravnine. Uzmimo po volji neku plohu 2. reda i postavimo na nju tangencijalne ravnine svakim pravcem neizmjerno daleke ravnine: dakle parove tangencijalnih paralelnih ravnina u konačnosti. Odaberemo li osim toga po volji negdje u konačnosti neku točku P, pa ovom postavimo okomice na parove tih tangencijalnih ravnina te ih njima probodemo, tad će sva tako nastala probodišta sačinjavati poznatu nožišnu plohu 4. reda, koja dva puta prolazi apsolutnom čunjosječnicom (ciklida). Okomitost zraka točke P i parova paralelnih tangencijalnih ravnina naše plohe 2. reda, definira u neizmjerno dalekoj ravnini polaran odnos obzirom na apsolutnu čunjosječnicu. Budući da na svakoj zraci točke P imamo, osim nje, još dvije točke nožišne plohe, to će takav par na izotropnim pravcima točke P pasti uvijek u jednu točku, i to duž apsolutne čunjosječnice, jer izotropni pravci točke P spajaju ovu s točkama te apsolutne čunjosječnice. Vidimo dakle, da je apsolutna čunjosječnica uistinu dvostruka na našoj nožišnoj plohi.

Odaberemo li sada paraboloid kao plohu 2. reda, onda će se nožišna ploha 4. reda ovakve plohe 2. reda raspasti u neizmjerno daleku ravninu i neku opću plohu 3. reda, jer svakim neizmjerno dalekim pravcem možemo na taj paraboloid postaviti jednu konačnu i neizmjerno daleku tangencijalnu ravninu. Ova neizmjerno daleka ravnina prolazi apsolutnom čunjosječnicom, dakle njome jedamput prolazi i spomenuta opća ploha 3. reda, jer je ta čunjosječnica dvostruka za kompletnu nožišnu plohu. Pol P bit će naravski i ovdje dvostruka točka ovakve plohe.

U ovoj radnji zabavit ćemo se jednom vrstom ovakvih ploha, i to onih koje nastaju iz rotacionog paraboloida, za bilo koji pol P u konačnosti.

Uzmimo sada takav rotacioni paraboloid i neku točku P kao pol. Nožišnu plohu tog pola dobit ćemo, kao što je poznato, tako, da iz točke P postavimo okomice na svaku tangencijalnu ravninu toga paraboloida, te ju njome probodemo. Sva ovako dobivena probodišta ležat će na nekoj općoj plohi 3. reda, koja prolazi apsolutnom čunjosječnicom, a kojoj je točka P dvostruka točka.

Zamislimo sada na naš rotacioni paraboloid postavljen jedan tangencijalan valjak. Ravnina parabole, duž koje taj valjak tangira naš rotacioni paraboloid, bit će paralelna s osi toga paraboloida. Sve tangencijalne ravnine ovog valjka su istovremeno i tangencijalne ravnine našeg paraboloida. Okomice spuštene iz točke P na ove ravnine nalazit će se u okomitoj ravnini na tom valjku, dakle će nožišta tih okomica ležati na ravninskoj nožišnoj krivulji presječne parabole tog tangencijalnog valjka. Za ovakve nožišne krivulje u ravnini znademo, da su cirkularne krivulje 3. reda s polom P kao dvostrukom točkom. Osim toga znademo za ovakve nožišne cirkularne krivulje parabole, da im se četverostruki fokus nalazi u polovištu spojnice dvostruke točke s fokusom parabole, kojoj je ta krivulja nožišna.

Kad bi na naš rotacioni paraboloid postavili sve tangencijalne valjke, i na svakom odredili spomenutu ravninsku nožišnu krivulju, tad bi sve takve krivulje sačinjavale našu opću plohu 3. reda.

Siječemo li naš rotacioni paraboloid meridijanskim ravninama, tada su svi tako nastali meridijani jednake parabole sa zajedničkom osi i zajedničkim tjemenom. Sve će takve meridijanske parabole imati prema tome zajednički fokus E, kao i ravninu α okomitu na os toga paraboloida, u kojoj se nalazi pramen ravnalica tih meridijanskih parabola. Odaberemo li točku E kao vrh tangencijalnog stošca našeg rotacionog paraboloida, onda će taj stožac dirati naš paraboloid duž imaginarne kružnice u kojoj ga siječe ravnina α, jer je ona polarna ravnina tog paraboloida za točku E kao pol. Sve izvodnice tog stošca su izotropni pravci, dakle taj stožac prolazi i apsolutnom čunjosječnicom u neizmjernosti.

Odaberimo ponovno jedan tangencijalan valjak našeg rotacionog paraboloida, a točkom E povucimo pravac e paralelan s izvodnicama tog valjka. Povučemo li neizmjerno dalekom točkom ovog pravca tangente na apsolutnu čunjosječnicu, tad je tim tangentama i pravcem e dan par imaginarnih ravnina. Ove ravnine tangiraju naš imaginaran tangencijalan stožac vrha E, a prema tome i naš rotacioni paraboloid. Jer je njihova realna presječnica paralelna s našim tangencijalnim valjkom, dirat će te imaginarne ravnine i taj valjak. Sve ravnine postavljene realnom neizmjerno dalekom polarom neizmjerno daleke točke pravca e kao pola obzirom na apsolutnu čunjosječnicu, sjeći će ovaj par imaginarnih tangencijalnih ravnina u paru izotropnih pravaca. Sve te ravnine (okomite na taj valjak) imaju zajedničke apsolutne točke, dakle sve te izotropne presječnice, koje tangiraju presječne parabole spomenutog tangencijalnog valjka, imaju svoja realna sjecišta na pravcu e. Ta su sjecišta prema tome fokusi E' tih presječnih parabola. Budući da je polarni odnos obzirom na apsolutnu čunjosječnicu definiran u konačnosti okomitošću, vidimo, da se fokus E' okomite projekcije rotacionog paraboloida na bilo kakvu ravninu podudara s projekcijom zajedničkog fokusa svih osnih presjeka toga paraboloida.

Na temelju naših razmatranja znademo, da svaki ravninski presjek nožišne plohe nekog rotacionog paraboloida, koji prolazi njenom dvostrukom točkom, možemo smatrati nožišnom krivuljom presječne krivulje jednog tangencijalnog valjka tog paraboloida za tu dvostruku točku kao pol, ako je ravnina presjeka okomita na taj valjak. Osim toga smo sprijeda spomenuli, da se četverostruki fokus nožišne krivulje neke parabole nalazi u polovištu spojnice dvostruke točke s fokusom te parabole. Za fokus takve presječne parabole pokazali smo nadalje, da se nalazi u okomitoj projekciji E' na tu ravninu zajedničkog fokusa E svih osnih presjeka tog rotacionog paraboloida. Vidimo dakle, ako pol P spojimo s točkom E, i polovište F te dužine okomito projiciramo na svaku ravninu točke P u točku F', onda će ta točka uvijek pasti u polovište spojnice PE', dakle će ona biti četverostruki fokus presječne krivulje naše nožišne plohe s tom ravninom.

Učinimo li sada obrnuto, t. j. postavimo li u četverostrukom fokusu F' svakog ravninskog presjeka naše nožišne

plohe, s ravninom dvostruke točke P, okomicu l, tad će sve takve okomice prolaziti gore spomenutom točkom F. Odaberimo sada po volji jedan takav ravninski presjek kroz točku P, i u njegovom četverostrukom fokusu F' postavimo okomicu l na ravninu tog presjeka. Za točku F' znademo, da je realno sjecište izotropnih tangenata te presječne krivulje u apsolutnim točkama, kojima ona prolazi. Pravac l i ove tangente određuju par imaginarnih ravnina, koje tangiraju apsolutnu čunjosječnicu, jer je pravac l okomit na ravnini presjeka, a prolaze točkom F, jer tom točkom prolazi okomica l. Budući da ovo vrijedi za svaki ravninski presjek dvostruke točke P, a svi pravci l prolaze točkom F, to vidimo, da svi ovakvi parovi imaginarnih ravnina omataju imaginaran stožac s realnim vrhom F, koji prolazi apsolutnom čunjosječnicom i duž nje tangira našu nožišnu plohu. Postavimo li naime točkom F ravninu okomitu na pravac l, bit će točka F četverostruki fokus presječne krivulje nožišne plohe s tom ravninom, jer ova ravnina ima iste apsolutne točke u neizmjernosti kao i ona paralelna s njom u točki P. Dakle su izotropne tangente ravninskog presjeka kroz točku F presječnice s istim parom imaginarnih tangencijalnih ravnina pravca l, a prema tome su to izvodnice onog imaginarnog tangencijalnog stošca vrha F. Na temelju dosadanjih razmatranja možemo prema tome izreći ovaj stavak:

Nožišna ploha rotacionog paraboloida, za bilo koji pol P, *prolazi apsolutnom čunjosječnicom tako, da imaginarne tangencijalne ravnine te nožišne plohe duž apsolutne čunjosječnice, omataju stožac 2. reda s realnim vrhom* F, *koji se nalazi u polovištu spojnice pola* P *i zajedničkog fokusa svih meridijanskih parabola toga paraboloida.*

Evidentno je, da će se točka F nalaziti na površini nožišne plohe onda, ako se pol P odabere u ravnini α, u kojoj se nalaze ravnalice svih meridijanskih parabola. Ako se pol P odabere na osi tog rotacionog paraboloida, onda će i nožišna ploha biti rotaciona.

Kod ploha 2. reda je kugla takva ploha, koja prolazi apsolutnom čunjosječnicom, a središte F joj je vrh imaginarnog tangencijalnog stošca duž te čunjosječnice. Nisu nam potrebna opširna razmatranja, pa da se zapazi potpuno analogne osobine naše nožišne plohe i kugle, ako uočimo činjenicu, da je središte svake kružnice njen četverostruki fokus. Na pr.:

1) Četverostruki fokus svakog ravninskog presjeka nožišne plohe rotacionog paraboloida, nalazi se u okomitoj projekciji točke F na tu ravninu.

U vezi s ovim, dobivamo odmah i ovo:

2) Četverostruki fokusi ravninskih presjeka s ravninama nekog pravca nalaze se na kružnici, koja prolazi točkom F i okomito dijametralno siječe taj pravac.

3) Četverostruki fokusi ravninskih presjeka s ravninama neke točke leže na kugli, kojoj ta točka i točka F određuju jedan promjer.

Prodor svake kugle s ovakvom nožišnom plohom daje prostornu krivulju 4. reda, jer obje plohe prolaze apsolutnom čunjosječnicom. Sve kugle središta F prodiru našu nožišnu plohu samo u jednoj kružnici, jer duž apsolutne čunjosječnice tangiraju tu plohu.

Postavimo li na naš rotacioni paraboloid tangencijalan valjak paralelan sa spojnicom točaka E, P, onda će nožišna krivulja u okomitoj ravnini točke P na taj valjak degenerirati u pravac. Točka će E' naime pasti u točku P, a nožišna krivulja parabole za njen fokus kao pol je, kao što znademo, tjemena tangenta te parabole. Vidimo dakle, da naša nožišna ploha ima u konačnosti jedan realan pravac, i to samo jedan, jer samo u spomenutoj ravnini može nastupiti opisani slučaj. Paralelni presjeci s ovakvom ravninom imat će naravski svoj četverostruki fokus na spojnici EP. Budući da ravnine kružnica, u kojima kugle središta F prodiru našu nožišnu plohu, sijeku našu plohu još i u jednom pravcu, a takav postoji u konačnosti samo jedan, to mogu one prolaziti samo tim pravcem, jer nisu paralelne da bi mogle prolaziti neizmjerno dalekim. Radi apsolutne čunjosječnice u neizmjerno dalekoj ravnini, ima ta ploha u toj ravnini još i jedan realan pravac. Vidimo dakle, da spomenute kružnice naše plohe leže u ravninama jednog sveska, kojega je os jedini realni pravac u konačnosti na toj plohi. Budući da su sve tangencijalne ravnine našeg rotacionog paraboloida, koje su paralelne s njegovom osi, nalaze u neizmjernosti, to će i pripadna nožišta u tim ravninama, kao točke naše nožišne plohe, ležati na neizmjerno dalekom pravcu ravnine okomito postavljene točkom P na os našeg paraboloida. Neimjerno daleki pravac naše nožišne plohe je prema tome okomit na osi našeg rotacionog paraboloida. Ovo uostalom proizlazi i iz si-

metrije naše nožišne plohe. Konačan realan pravac ove naše plohe je također okomit na spomenutu os, dakle njime i neizmjerno dalekim možemo postaviti ravninu. Poznata je međutim činjenica, da se na svakoj općoj plohi 3. reda nalaze barem tri realna pravca, od kojih dva mogu pasti i skupa. Budući da u spomenutoj ravnini konačnog i neizmjerno dalekog pravca nema u konačnosti trećeg pravca, to se taj treći poklapa s onim u neizmjernosti, dakle je taj neizmjerno daleki pravac dvoznačan. Osim toga odavle proizlazi, da je ravnina tih pravaca asimptotska ravnina naše nožišne plohe, jer ona tu plohu tangira duž čitavog neizmjerno dalekog pravca.

Siječemo li našu nožišnu plohu i sa svim ostalim ravninama tog neizmjerno dalekog pravca, morat će dobivene čunjosječnice biti kružnice, jer one prolaze sjecištima tog neizmjerno dalekog pravca s apsolutnom čunjosječnicom. Vidimo prema tome, da su ova sjecišta imaginarne dvostruke točke naše nožišne plohe. Osim toga vidimo, da smo dobili još jedan svezak ravnina (paralelnih), u kojima se nalaze kružnice naše plohe.

Znademo, da svaka kugla prodire našu nožišnu plohu u prostornoj krivulji 4. reda. Ova se prodorna krivulja može međutim raspasti i u dvije kružnice. Ako naime kružnicom naše plohe, koja pripada jednom svesku ravnina, postavimo bilo kakvu kuglu, onda će ona prodirati našu plohu u još jednoj kružnici, koja će ležati u jednoj ravnini drugog sveska.

Budući da je naša nožišna ploha simetrična, možemo njenim realnim pravcima postaviti na nju četiri tangencijalne ravnine, kojih će se dirališta nalaziti u simetralnoj ravnini te plohe. Simetralna ravnina siječe naime tu plohu u krivulji 3. reda roda nultoga, a svakom točkom takve krivulje možemo na nju povući dvije tangente, ako se ta točka ne nalazi na njenoj vitici (zatvoren konačan dio iznad dvostruke točke), što u našem slučaju ne postoji. U ovim diralištima raspada se presječna kružnica u dva izotropna pravca, dakle na ovakvim nožišnim plohama nalaze se uvijek četiri kružne točke. Dvije od tih pasti će u šiljak te plohe, ako ga ona ima. Naše nožišne plohe mogu naime imati običnu dvostruku točku, izoliranu dvostruku točku, ili šiljak, prema tome, da li se pol P nalazi izvan, unutar ili na paraboloidu.

Znademo, da je strofoida, odnosno strofoidala, takva cirkularna krivulja 3. reda roda nultoga, odnosno prvoga, kojoj

se četverostruki fokus nalazi na njoj samoj. Na temelju nabrojenih osobina naše nožišne plohe, koje su zajedničke s kuglom, mogu se vrlo lako dobiti i one osobine takve plohe, koje se odnose na njene strofoidalne ravninske presjeke. Na pr. svaka kružnica probada našu nožišnu plohu najviše u četiri točke, jer se preostale dvije nalaze na apsolutnoj čunjosječnici u neizmjernosti. Odavle direktno proizlazi ovo: *Siječemo li nožišnu plohu rotacionog paraboloida ravninama jednog sveska, tada će u tom svesku biti najviše četiri ravnine, koje će tu plohu sjeći u strofoidalama.*

Spomenuli smo već, da svaka kugla prodire našu plohu u nekoj prostornoj krivulji 4. reda, a četverostruki fokusi svih ravninskih presjeka s ravninama jedne točke nalaze se na poznatoj kugli. Kod strofoidalnih presjeka s ravninama jedne točke nalaze se ti fokusi i na kugli i na plohi, dakle dobivamo ovo: *Siječemo li nožišnu plohu rotacionog paraboloida s ravninama jedne točke, onda će ∞^1 tih ravnina sjeći tu plohu u strofoidalama tako, da će se četverostruki fokusi tih strofoidala nalaziti na nekoj prostornoj krivulji 4. reda (cikliki) na toj nožišnoj plohi.*

ÜBER DIE FUSSPUNKTSFLÄCHEN DES ROTATIONSPARABOLOIDS

Von Dr. Vilko Niče, Zagreb

Zusammenfassung

Die Fusspunktsflächen der Flächen 2. Ordnung sind die bekannten Zykliden, d. h. Flächen vierter Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt zweimal enthalten (Darboux). Die Fusspunktsflächen des Paraboloids zerfallen in die unendlichferne Ebene und eine allgemeine Fläche 3. Ordnung, und jeder dieser Teile geht durch den absoluten Kegelschnitt. In dieser Arbeit behandeln wir näher die Fusspunktsflächen des Rotationsparaboloids.

Zu jedem Rotationsparaboloid gehört der auf der Achse befindliche gemeinsame Brennpunkt der Achsenschnitte, sowie die Polarebene α dieses Brennpunktes, die den Büschel der Leitgeraden der Achsenschnitte enthält. Dieser gemeinsame

Brennpunkt E ist die Spitze des imaginären Berührungskegels des Paraboloids längs seines imaginären Schnittes mit der Ebene α. Dieser imaginäre Kegel enthält auch den absoluten Kegelschnitt, da seine Erzeugenden isotrope Gerade sind.

Ziehen wir durch den Punkt E eine Parallele e mit einem Berührungszylinder des Paraboloids. Das durch die Gerade e gehende Paar imaginärer Berührungsebenen des erwähnten imaginären Kegels berührt das Paraboloid und seinen Berührungszylinder. Die Fusspunktskurve dieses Berührungszylinders bezüglich eines Pols P ist der Schnitt der Fusspunktsfläche des Rotationsparaboloids mit der auf dem Zylinder senkrecht stehenden Ebene durch den Punkt P. Wegen dieses Senkrechtstehens schneidet diese Ebene den absoluten Kegelschnitt in jenen zwei Punkten, durch welche das Paar isotroper Erzeugenden des imaginären Kegels geht, in denen die zwei durch die Gerade e gehenden Berührungsebenen diesen Kegel berühren. Nicht nur die erwähnte Ebene durch den Pol P, sondern auch alle übrigen auf der Geraden e senkrechten Ebenen gehen durch dasselbe Punktepaar des absoluten Kegelschnittes. Sie werden daher den Berührungszylinder in Parabeln schneiden, deren Brennpunkte auf der Geraden e liegen. In diesen Punkten schneiden sich nämlich die Paare isotroper Tangenten dieser Schnittparabeln. Es ist daher ersichtlich, das der Brennpunkt jeder senkrechten Projektion des Paraboloids auf irgendeine Ebene mit der Normalprojektion E' des Punktes E auf diese Ebene identisch ist. Es ist ferner bekannt, dass sich der vierfache Brennpunkt jeder Fusspunktskurve einer Parabel im Hälftungspunkt der Entfernung des Pols P und des Brennpunkts dieser Parabel befindet. Verbinden wir daher unseren Pol P mit dem Punkt E, so wird sich der Hälftungspunkt F der Strecke EP senkrecht zu jeder Ebene des Punktes P in den vierfachen Brennpunkt der Schnittkurve dieser Ebene mit unserer Fusspunktsfläche projizieren. Schneiden wir weiter die Fusspunktsfläche mit einer Ebene des Punktes P und legen durch die Verbindungsgerade des vierfachen Brennpunktes des Schnittes und des Punktes F ein Paar imaginärer Ebenen so zwar, dass diese durch das Paar isotroper Tangenten dieser Schnittkurve gehen, so berühren diese Ebenen die Fusspunktsfläche in den absoluten Punkten der Schnittebene. Da dies für jede Ebene des Punktes P gilt, also auch für jede Gerade des

Punktes F, ist der Punkt F die reelle Spitze des imaginären Berührungskegels unserer Fläche längs des absoluten Kegelschnitts. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich der vierfache Brennpunkt jedes ebenen Schnittes der Fusspunktsfläche des Rotationsparaboloids in der Normalprojektion des Punktes F auf die Schnittebene befindet, ebenso, wie das bei der Kugel der Fall ist. Hieraus folgt noch eine Reihe weiterer Analogien mit der Kugel.

In der auf der Verbindungsgeraden PF senkrechten Ebene des Punktes P wird sich die einzige reelle eigentliche Gerade der Fusspunktsfläche befinden. Die unendlichferne auf der Achse des Rotationsparaboloids senkrechte Gerade ist die zweideutige Gerade der Fusspunktsfläche, längs welcher diese von der durch die eigentliche Gerade gehende Ebene berührt wird.

Auf Grund dieser mit der Kugel in Analogie stehenden Eigenschaft der Fläche lassen sich weitere Eigenschaften der Fläche bezüglich ihrer strophoidalen Schnitte mit den Ebenen einer Geraden oder eines Punktes ableiten. Z. B. in jedem Ebenenbüschel gibt es vier Ebenen, die unsere Fläche in Strophoidalen oder Strophoiden schneiden. Ferner: alle Ebenen (∞^1) eines Ebenenbündels, die die Fläche in Strophoidalen oder Strophoiden schneiden, haben ihre vierfachen Brennpunkte auf einer sphärischen Raumkurve 4. Ordnung. Wählen wir den Pol P in der Ebene α, so befindet sich die Spitze F auf der Fusspunktsfläche. Es lässt sich leicht schliessen, dass eine solche allgemeine Fläche 3. Ordnung vier Nabelpunkte in ihrer Symmetralebene hat. Zwei davon fallen in die Spitze der Fläche, falls diese eine solche besitzt.

O VARIJACIONOM PRINCIPU SPECIJALNE TEORIJE RELATIVNOSTI

Dr. Zlatko Janković, Zagreb

Već odavno je privlačilo formuliranje osnovnih veza među fizikalnim veličinama u obliku varijacionih principa. Razlog je tomu, što su tada te veze izražene matematski prikladnijim načinom no što su sami diferencijalni zakoni, što pružaju veću mogućnost uopćavanja, a također što imaju znatnu heurističku vrijednost.

Na području mehanike počela su ta nastojanja nakon što je J. Bernoulli[1] izrekao princip virtuelnih pomaka u statici, a J. d'Alembert[2] dao svoj princip u dinamici. Prvi pokušaj Maupertuisa i Eulera nosi doduše nepotrebno teleološko obilježje i uzrokovao je svojom nejasnom formulacijom dugotrajne raspre[3]. J. Lagrange[4] povezuje zatim princip virtuelnih pomaka i d'Alembertov princip u univerzalnu jednadžbu gibanja, a njegove generalizirane jednadžbe imaju upravo oblik Eulerovih jednadžba izvjesnog varijacionog problema. R. Hamilton[5] postavlja varijacioni princip ekvivalentan Lagrangeovim jednadžbama i on predstavlja temelj kasnijeg razvoja[6].

Razmotrimo slučaj jedne materijalne točke u klasičnoj mehanici. Lagrangeova univerzalna jednadžba

$$\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right) \delta\mathbf{r} = 0 \qquad (1)$$

omogućuje izvesti matematički oblik varijacionog principa:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \mathbf{F}\,\delta\mathbf{r})\,dt = \mathbf{p}\,\delta\mathbf{r}\,\Big|_{t_0}^{t_1}\,, \qquad (2)$$

uzevši u obzir, da se radi o virtuelnim pomacima $\delta\mathbf{r}$, koji kontinuirano ovise o vremenu, ali pri kojima ne variramo vrijeme. Tada pridružene točke $P(\mathbf{r}, t)$ na stvarnom putu i $Q(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t)$

na variranom putu odgovaraju istom vremenu t. Ukoliko se početne i konačne točke stvarnog i variranog puta podudaraju

$$\delta \mathbf{r}(t_0) = \delta \mathbf{r}(t_1) = 0\,, \tag{3}$$

desna strana izraza (2) iščezava i varijacioni princip tada glasi

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \mathbf{F}\,\delta \mathbf{r})\,dt = 0\,. \tag{2a}$$

Treba pri tom istaknuti, da je i Lagrangeova univerzalna jednadžba (1) i varijacioni princip (2), (2a) invarijantan za Galilejevu transformaciju, t. j. udovoljuje principu relativnosti klasične mehanike.

Promatramo li općenitije varijacije pri kojima pridružujemo točke $P(\mathbf{r}, t)$ i $Q(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, t + \Delta t)$, za koje postoji i varijacija vremena, one mogu postati izvorom mnogih nejasnoća i nesporazumaka[7]. Veza između jednih i drugih varijacija je jednostavna i očigledna

$$\Delta \mathbf{r} = \delta r + \mathbf{v}\,\Delta t\,. \tag{4}$$

Budući da varijacija neke veličine znači razliku njenih vrijednosti u pripadnim točkama na variranom i stvarnom putu, postoje također i ove evidentne relacije

$$\Delta\, d\mathbf{r} = d(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - d\mathbf{r} = d\,\Delta\mathbf{r}$$
$$\Delta\, dt = d(t + \Delta t) - dt = d\,\Delta t\,.$$

Dalje slijedi[8]

$$\Delta\, d\mathbf{r} = \Delta(\mathbf{v}dt) = \Delta\mathbf{v}\,dt + \mathbf{v}\,\Delta\, dt$$

$$\Delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\Delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\frac{d\,\Delta t}{dt}\,. \tag{5}$$

U tom rezultatu je sadržana i veza

$$\delta \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}\,, \tag{5a}$$

koja postoji u slučaju pridruživanja istovremenih točaka.

Cilj je ove radnje pokazati, da se varijacioni princip specijalne teorije relativnosti izvodi posve analogno onom u klasičnoj mehanici, i nadalje odrediti ulogu, koju pri tom imaju opće varijacije (4). Radnja ujedno predstavlja logički nastavak razmatranja, koja je proveo autor na osnovu aksiomatskog su-

stava mehanike od četiri aksioma, i u kojima je pokazao mogućnost potpuno analogne izgradnje klasične mehanike materijalne točke sa

$$m_0 = konst\,, \tag{6}$$

i specijalne teorije relativnosti sa

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{6a}$$

kao aksioma mase[9]. U daljem razmatranju ograničit ćemo se na slučaj jedne materijalne točke, budući da sistem točaka, koje međusobno djeluju, ne znamo opisati na relativistički invarijantan način[10].

Prema tome poći ćemo od Lagrangeove univerzalne jednadžbe (1) i najprije pokušati je transformirati tako, da ona poprimi oblik, koji je očigledno invarijantan prema Lorentz-Einsteinovim transformacijama. To lako postizavamo pomoću veze (4). Tada slijedi iz univerzalne jednadžbe (1) jednadžba

$$\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{p}}{dt}\right)(\Delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\,\Delta t) = 0\,. \tag{7}$$

Uvodimo diferencijal »vlastitog« vremena

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,dt\,, \tag{8}$$

četverovektor sile $\mathbf{K}^4$

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,, \qquad K_4 = \frac{i}{c}(\mathbf{v}\,\mathbf{K})\,, \tag{9}$$

četverovektor veličine gibanja $\mathbf{p}^4$

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}\,, \qquad p_4 = i\,mc\,, \tag{10}$$

i četverovektor pomaka $\Delta\mathbf{s}^4$

$$\Delta\mathbf{r}\,, \quad ic\,\Delta t\,. \tag{11}$$

Izraz (7), nakon jednostavne transformacije

$$\mathbf{v}\,\frac{dm\mathbf{v}}{d\tau} = \frac{dmc^2}{d\tau}\,,$$

poprima tada oblik

$$\left(\mathbf{K}^4 - \frac{d\mathbf{p}^4}{d\tau}\right)\Delta\,\mathbf{s}^4 = 0\,. \tag{12}$$

Ova relacija upravo predstavlja traženi četverodimenzionalni invarijantni oblik Lagrangeove univerzalne jednadžbe (1), budući da u njoj dolaze skalarni produkti četverovektora, koji su invarijantni za Lorentz-Einsteinovu transformaciju. Time je jasno istaknuta i potreba uvođenja općih varijacija, jer ako u jednom sustavu i možemo pridružiti istovremene točke na stvarnom i variranom putu, ta osobina istovremenosti prostorno različitih točaka gubi se, prema specijalnoj teoriji relativnosti, prijelazom u drugi fizikalno ravnopravan sustav[11].

Sam varijacioni princip izvest ćemo sada analogno onom u klasičnoj mehanici. Provedimo slijedeću transformaciju

$$\frac{d\mathbf{p}^i}{d\tau}\,\Delta\mathbf{s}^i = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{p}^i\,\Delta\mathbf{s}^i) - \mathbf{p}^i\,\frac{d\,\Delta\mathbf{s}^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\mathbf{p}^i\,\Delta\,\mathbf{s}^i) +$$

$$+\left[\frac{m_0\,c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + m_0\,c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{d\,\Delta t}{d\tau}\right].$$

Pomoću nje možemo integriranjem Lagrangeove univerzalne jednadžbe (12) po vlastitom vremenu, u određenim granicama τ_0 i τ_1, dobiti kao matematički izraz varijacionog principa

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\mathbf{K}^i\,\Delta\,\mathbf{s}^i\,d\tau - m_0\,c^2\,\Delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \mathbf{p}^i\,\Delta\mathbf{s}^i\Big|_{\tau_0}^{\tau_1}. \tag{13}$$

Uzmemo li da se početne i konačne točke stvarnog i variranog puta podudaraju

$$\Delta\mathbf{s}^i(\tau_0) = \Delta\mathbf{s}^i(\tau_1) = 0\,, \tag{14}$$

preostaje[12] od (13)

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}\mathbf{K}^i\,\Delta\mathbf{s}^i\,d\tau - m_0\,c^2\,\Delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = 0\,. \tag{13a}$$

Navedimo nekoliko specijalnih slučajeva ovog principa.

U slučaju slobodne materijalne točke $\mathbf{K}^i = 0$, pa preostaje

$$\Delta\int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = 0\,. \tag{15}$$

Nalazimo li se u sustavu u kojem pridružujemo istovremeno točke, prelazi izraz (13a) u ovaj[13]:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\mathbf{F}\, \delta \mathbf{r} - m_0\, c^2\, \delta \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] dt = 0\,, \tag{16}$$

odnosno, ako postoji mogućnost definiranja funkcije sile U[14]

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U\,, \tag{17}$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[- m_0\, c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U \right] dt = 0\,. \tag{16a}$$

U izrazu (13a) sadržana je također klasična mehanika kao granični slučaj za $\frac{v}{c} \to 0$. Razvijanjem u red slijedi uz to ograničenje

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\mathbf{F}\, \Delta \mathbf{r}\, dt - \mathbf{F}\, d\mathbf{r}\, \Delta t + \frac{1}{2} \Delta \left(m_0\, v^2\, dt \right) \right] = 0\,. \tag{18}$$

Nadalje, ako silu možemo prikazati pomoću funkcije sile (17), prvi član u podintegralnoj funkciji prelazi u

$$- \Delta U\, dt + d U\, \Delta t\,,$$

koji parcijalnom integracijom omogućuje napisati varijacioni princip u obliku[15]

$$\Delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0\,. \tag{19}$$

Ako se radi o istovremenom pridruživanju točaka, tada slijedi iz (16) ovaj oblik

$$\int_{t_0}^{t_1} (\mathbf{F}\, \delta \mathbf{r} + \delta T)\, dt = 0\,, \tag{20}$$

ili u slučaju (17), poznati izraz Hamiltonovog principa

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0\,. \tag{20a}$$

Primijenimo ova razmatranja na Lorentzovu silu[16]

$$\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right). \qquad (21)$$

Uvedimo vektor potencijal $\mathbf{A}$ i skalarni potencijal φ pomoću poznatih relacija

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\,.$$

Prvi dio podintegralne funkcije u izrazu (13a)

$$\mathbf{K}^i\,\Delta\mathbf{s}^i\,d\tau = \mathbf{F}\,(\Delta\mathbf{r} - \mathbf{v}\,\Delta t)\,dt$$

naći ćemo, uz oblik sile (21), pomoću ovih transformacija

$$\frac{e}{c}\,\Delta\mathbf{r}\,(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}) = \frac{e}{c}\left[\mathbf{v}\left(\Delta\mathbf{A} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)\Delta t - (\mathbf{v}\operatorname{grad})\,\mathbf{A}\,\Delta\mathbf{r}\right]$$

$$e\,\mathbf{E}\,\Delta\mathbf{r} = -e\left(\Delta\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\Delta t\right) - \frac{e}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,\Delta\mathbf{r}$$

$$-e\,\mathbf{E}\,\mathbf{v}\,dt\,\Delta t = e\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Delta t\,dt + \frac{e}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,\mathbf{v}\,\Delta t\,dt$$

Uvrstimo te izraze u sam princip (13a), i nakon lakog sređivanja dobivamo izraz[17]

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\mathbf{A} - e\varphi\right)dt = 0\,. \qquad (22)$$

U sustavu gdje pridružujemo istovremene točke slijedi

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\mathbf{A} - e\varphi\right)dt = 0\,. \qquad (22a)$$

Prijelazom na granični slučaj $\frac{v}{c}\to 0$ vidimo, prema izrazima (22) i (22a), da će i opća i bezvremenska varijacija integrala

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(T - e\varphi + \frac{e}{c}\,\mathbf{v}\mathbf{A}\right)dt \qquad (23)$$

iščezavati[18].

Time držimo, da je sistematski izložena veza varijacionog principa klasične mehanike materijalne točke i specijalne teorije relativnosti, odnos opće i bezvremenske varijacije, kao i njihova uloga pri formuliranju varijacionog principa. Ujedno su izvedene toliko važne Lagrangeove funkcije [podintegralne funkcije u izrazima (16a), (20a), (22a) i (23)], koje omogućuju tvorbu pripadnih Hamiltonovih funkcija

$$H = \sum_k p_k\, q_k - L\,(q_i, \dot{q}_i, t), \tag{24}$$

a onda i Hamilton-Jacobijeve diferencijalne jednadžbe[19], kao i formiranje odgovarajućih operatora valne mehanike[20].

LITERATURA:

[1] J. Bernoulli jasno je izrazio princip virtuelnih pomaka u jednom pismu P. Varignonu 1717. Isp. P. Duhem: Les origines de la statique, II, 1905, str. 269.

[2] J. d'Alembert objavljuje svoj princip u »Traité de Dynamique«, I, 1742 (izd. Gauthier-Villars, 1921, str. 75).

[3] Isp. A. Voss: Die Prinzipien der rationellen Mechanik, Enc. d. math. Wiss. IV, str. 95.

[4] J. L. Lagrange: Mécanique analitique, I, 3. izd. 1853. str. 234.

[5] R. Hamilton u Phil. Trans. 1834, str. 307; 1835, str. 95. Isp. E. T. Whittaker: Analytische Dynamik, 1924, str. 259.

[6] Daljnji principi modificiraju karakter varijacija. Tako Jourdainov princip uzima varijacije brzina (Quarterly Journal, 39, 1908, str. 251), a Gaussov varijacije akceleracija (C. F. Gauss, Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, 4, 1829). Isp. C. Schaefer: Die Prinzipe der Dynamik, 1919; L. Nordheim: Die Prinzipe der Dynamik, Hand. d. Ph. V, 1927.

[7] O. Hölder: Göttinger Nachr. 1896, str. 122 jasno je uočio razliku između obih načina variranja u vezi s primjenom na Lagrangeovu osnovnu jednadžbu. Isp. C. Schaefer: l. c. 6, str. 40; L. Nordheim l. c. 6, str. 81. Također L. Boltzmann: Vorl. über die Prinzipe der Mechanik, II, 1904.

[8] Ovu relaciju obično izvode uz pomoć parametra o kojem ovisi i vrijeme i prostorne koordinate, a koji ne variramo. Isp. A. Kneser: Lehrbuch d. Variationsrechnung, 1925, str. 52: C. Schaefer l. c. 6, str. 40.

[9] Z. Janković: Prilog izgradnji mehanike (Odnos klasične mehanike i specijalne teorije relativnosti) (u štampi). To su aksiomi: I. aksiom mase, II. aksiom sile, III. aksiom akcije i reakcije i IV. aksiom princip relativnosti.

[10] G. Garcia: Rend. dei Lincei, VI, 27, 1938, str. 23, postavlja jedn. za sistem čestica, koje su podvrgnute uvjetima, ali koje međusobno ne djeluju.

[11] A. Rice: Relativity, 1923, str. 250 razmatra relativističku invarijantnost varijacionog principa, pa dodiruje i pitanje istovremenog pridruživanja.

[12] Bez ikakvog dokaza nalazimo taj oblik kao relativističko proširenje Hamiltonovog principa kod A. Kottlera: Gravitation und Relativitätstheorie, Enz. d. math. Wiss. VI 2/2, str. 161.

[13] Taj oblik nalazimo već kod M. Planck: Verh. d. deutschen Phys, Gess. 1906, 356. Isp. H. A. Lorentz: Die Relativitätstheorie für gleichförmige Translationen, 1929, str. 64.

[14] O mogućnosti uvođenja potencijalne energije u spec. teoriji relativnosti, isp. W. Pauli: Relativitätstheorie, Enz. d. math. Wiss. V_2, str. 678.

[15] Tu je sadržan i Eulerov princip, ako pridružujemo točke u kojima je ukupna energija ista.

[16] Isp. H. A. Lorentz: Weiterbildung d. Maxw. Theorie, Enz. d. math. Wiss. V_2, 1904, str. 156. Ta relacija međutim slijedi kao posljedica invarijantnosti Maxwellovih jedn. u spec. teoriji relativnosti. Isp. A. Einstein, Annallen d. Ph. (4), 17, 1905, str. 891.

[17] Isp. J. Frenkel: Lehrbuch d. Elektrodynamik, I, 1926. str. 328. L. Landau-E. Lifšic: Teorija polja, 1948, str. 52. Izvod se međutim razlikuje od onog u tekstu.

[18] Prvi puta susrećemo podintegralnu funkciju u (23) kao Lagrangeovu funkciju varijacionog problema kod K. Schwarzschild: Göttinger Nachr., 1903, str. 126. On dolazi međutim do te funkcije transformiranjem jedn. gibanja u Lagrangeove generalizirane jedn. U novijoj literaturi mnogi autori verificiraju postavljenu Lagrangeovu funkciju tako, da iz nje izvode diferencijalne jednadžbe. Isp. Urey-Ruark: Atoms, Molecules and Quanta, 1930, str. 757. A. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien, II, 1939, str. 720.

[19] Isp. na pr. M. Born: Vorl. über Atommechanik, I, 1925.

[20] Isp. na pr. A. Sommerfeld l. c. 18; L. Landau-E. Lifšic: Kvantovaja mehanika, 1948.

LE PRINCIPE VARIATIONNEL DE LA THEORIE DE LA RELATIVITE RESTREINTE

Par Dr. Zlatko Janković

Résumé

Tout d'abord, on donne un bref aperçu de l'importance et du développement historique de l'application du calcul variationnel aux problèmes mécaniques. On donne alors la base de la formulation hamiltonienne (1), (2), (3) et on constate qu'elle est invariante relativement aux transformations de Galilée. La notion de variation spéciale δ (où l'on ne varie pas le paramètre temps) est confrontée avec la variation Δ (4), dans laquelle, varie encore le temps et ce sont les expressions (5), (5a) qui mettent en évidence la différence des deux variations.

Le but de l'article c'est de montrer que le principe variationnel de la théorie de la rélativité restreinte se déduit tout analoguement que celui de la mécanique classique en se servant de la variation Δ et en partant d'un système d'axiomes que l'auteur avait substitué à celui de Newton[9]. Le système est formé de quatre axiomes et c'est le premier — l'axiome de

masse — qui, spécialisé de deux manières différentes caractérise la mécanique classique (6) et la théorie rél. restr. (6a) respectivement. Partant du principe de d'Alembert (1), nous pouvons, à l'aide de la variation Δ (4), obtenir la formule (7). Puis, tenant compte de (6a) et en nous servant des grandeurs bien connues dans la th. rel. restr. (8), (9), (10), (11) nous obtenons la formule (12). C'est le principe de d'Alembert dans l'espace à quatre dimensions, qu'on doit mettre à base dans la théorie rél. restr. et qui est évidemment invariant par rapport aux transformations de Lorentz-Einstein. Le principe variationnel se déduit de (12) par un calcul facile, et sa forme est (13), ou (13a) tenant compte de conditions aux limites (14). De là on obtient, par des spécialisations appropriées, les formes (15), (22) et pour les variations spécialles δ ($\Delta t = 0$) (16), (16a), (22a). La mécanique classique est contenue aussi dans ces résultats, comme cas limite $\frac{v}{c} \to 0$, ce qui est exprimé par les formules (19), (20a), (23).

L'intérêt d'un développement systématique de ces résultats est évident, les fonctions lagrangiennes qu'on obtient ainsi, étant — parmi d'autres choses — la base formelle à partir de laquelle on déduit les équations fondamentales de la mécanique quantique.

STAY I BOŠKOVIĆ O APSOLUTNOM GIBANJU*)

Dr. Stanko Hondl, Zagreb

Uvod. U prvom pjevanju svog novijeg epa Stay razlaže, što treba držati o prostoru i vremenu (I 607—782) i onda prelazi na gibanje. Stay se u svemu tomu povodi za Newtonom. Bošković u bilješkama i u dodatku § VIII. De motu absoluto, an possit a relativo distingui (t. j. alineja 65. do 77.) i u dodatku § XIII. De vi inertiae (t. j. al. 108. do 132.) iznosi naprotiv Newtonova svoje stajalište. Varićak u svom prezasluženom i obilnom radu o Boškovićevu životu i djelima osvrnuo se i na tu stranu Boškovićeva umovanja, i to u studiji »Matematički rad Boškovićev, Dio I.«,koja je izašla u akademijinu Radu knj. 181., g. 1910. U četiri §§, pod naslovima: Princip relativnosti, Apsolutno i relativno kretanje, Prvi prigovor Boškovićev Newtonu, Drugi prigovor Boškovićev Newtonu, Varićak prikazuje Boškovićevo mišljenje o apsolutnom gibanju i zaključuje, kako to odmah s početka kazuje (§ 6.), da je Bošković potpun relativista. (V. također Varićakov članak o Boškoviću u Hrv. Enciklopediji III.) Bilo je dobro, da je Varićak nešto kasnije dao preštampati u latinskom izvorniku veći dio tih Boškovićevih razmatranja, da budu svakomu lako pristupna; nalaze se u Radu knj. 190., iz g. 1912. U prikazu stvari moći ćemo se dakle poslužiti tima Varićakovima publikacijama. Neka je spomenuto, da se Varićakovi citati tiču one izradbe I. toma Stayeva i Boškovićeva djela, koja ima više stranica (XXXV+329) i u zagrebačkoj sveučilišnoj knjižnici ima signaturu 23049 Ia.

Apsolutni prostor i apsolutno gibanje. Kao fizičar newtonovac Stay drži, da ima neki apsolutni prostor i da postoje apsolutna gibanja. U to vjeruje i Bošković. Za dokaz tomu citirajmo već ovdje bar jednu Boškovićevu rečenicu. Navodi je i Varićak. Eto u prvo spomenutom dodatku, al. 67., Bošković kazuje: »može postojati apsolutno gibanje obiju točaka bez ikakova njihova relativnog gibanja..., relativno pak gibanje ne može postojati, izuzevši, da se bilo jedna od točaka bilo obje apsolutno giblju«. (Rad 190, str. 32.; 181, str. 96.) Bošković dakle u duhu operira s pojmom apsolutnog gibanja; on od njega ne zazire niti ga zabacuje.

Ne bi bilo pravo, da se taj Boškovićev stav ocijeni s gledišta suvremene, Einsteinove relativistike. Ali eto Ernst Mach, koji nije bio samo filozof već i fizičar, odlučno se protivi koncepciji apsolutnog prostora, te je proglašuje »očajnom«: der verzweifelte Gedanke an den absoluten Raum[1]). Isto tako Henri Poincaré kaže: Quiconque parle de l'espace absolu, emploie un mot vide de sens. I tomu čak dodaje: C'est là une vérité qui a été proclamée depuis longtemps par tous ceux qui ont réfléchi à la question, mais qu'on est trop souvent porté à oublier[2]). Ili da segnemo dalje u prošlost, u doba New-

---

*) Iz radnje: Benedikta Staya »Filozofija u stihovima« i »Novija filozofija u stihovima«.

[1]) E. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, 1883., str. 215.

[2]) H. Poincaré, Science et Méthode, 1908., str. 96.

tonovo! Kada Leibniz u pismu Huygensu iznosi protiv Descartesa, da je nečuveno tvrditi, da nema »pravog« gibanja, već samo relativno (absonum esse, nullum dari motum realem, sed tantum relativum), Huygens mu se čudi i odvraća: ta to ja smatram sasvim sigurnim (Ce que pourtant je tiens très constant).[3]) Dakako, jer relativiste ne priznaju nikakvo apsolutno gibanje.

Newtonov pokus s kablićem vode. U stihovima I 851—892 Stay opisuje prvi od oba pokusa, za koje Newton u uvodu svojih Principia, upravo u Sholiju na kraju Definicija, kazuje da mogu poslužiti nalaženju apsolutne vrtnje. Newtonov opis toga pokusa u prevodu glasi:

»Ako kablić (latinski: situla) visi na dugom užetu i zakreće se neprestano naokolo, dok uže od torzije veoma ne otvrdne, i ako se onda napuni vodom i zajedno s vodom smiri; a onda nekom časovitom silom (vi subitanea) potjera naokolo protivnim gibanjem, te odapinjanjem užeta (filo se relaxante) dulje vrijeme ostane u tom gibanju; — površina će vode na početku biti ravna, onako kao i prije gibanja posude (vas), a kada posuda, postepeno utiskujući vodi silu, učini da se i ona počne primjetljivo okretati, voda će postepeno odstupati od sredine i dizati se uz stijenu posude, poprimajući udubljen oblik (kako sam sâm iskušao), i kako gibanje bude sve brže i brže, dići će se više i više, dok ne bude u posudi relativno mirovala izvodeći okrete u jednakom vremenu kao i posuda«. Dakle »s početka, dok je bilo najveće relativno gibanje vode u posudi«, površina je vode »ostala ravna« i »pravo kružno gibanje još nije počelo«. »Kasnije međutim.... dizanje vode uz stijenu posude upućivalo je na to, da postoji nastojanje, da odstupi od osi, i to nastojanje pokazivalo je njezino pravo kružno gibanje, koje je sve više raslo i najposlije postalo najveće, kada je voda u posudi mirovala relativno. Prema tomu ono nastojanje ne zavisi o pomicanju vode s obzirom na okolišna tjelesa i zato se pravo kružno gibanje ne može pronaći s pomoću takvih pomicanja«.

Stayev prikaz tog pokusa nije sasvim vjeran. Kad je rekao, da se ulije voda, nastavlja:

ilicet illud (t. j. vas)
Oppositos age per motus, spirasque revolve:
Quae faciunt aliquo cieatur tempore labrum.

To će reći: »Sada odmah tjeraj posudu protivnim gibanjem i odmataj zavoje: oni neka učine, da se kablić giblje kroz neko vrijeme«. Vidimo, da tu nikako nije istaknuto, da je sila, kojom treba utjecati u prvi mah na posudu, časovita i da smo kabliću dali apsolutnu vrtnju, dok je još sva voda u njemu apsolutno mirovala[4]). To odstupanje od Newtona nije Stayu zamjeriti. Očito ga je na to potakao zdrav smisao za zbiljnost. Newtonov naime pokus u tom svom početku nesumnjivo je tek misleni pokus (Gedankenexperiment) i neizvediv. Kakvom bi se to silom mogla podijeliti kabliću u jednom trenu vrtnja, dok još nije započelo odmatanje užeta? i pogotovu kako bi to išlo, kad je u kabliću voda? Hidrodinamika upućuje, da uz stijenu posude nema skoka između brzine stijene i brzine vode, i kad bi uspjelo, da časovitom silom damo kabliću momenat impulza, dobile bi ga u isti čas bar bližnje česti vode, te voda ne bi sva mirovala. Newtonova primjedba u zagradama ut ipse expertus sum očito se tiče samo udubljenosti, a ne cijelog pokusa.

---

[3]) Huygensovo pismo Leibnizu od 29. V. 1694., preštampano u Oeuvres complètes X, g. 1905., pod br. 2854.; v. također Ludwig Lange, Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes... u Wundtovu časopisu Philosophische Studien III, g. 1886., str. 411.

[4]) V. također Rad 181, str. 99.

Mach[5]) slobodno prevodeći Newtonov tekst stavlja pred one zagrade točku, a rečenicu u zagradama čini samostalnom: Diesen Versuch habe ich selbst gemacht i s njom završuje alineju. Time držim mijenja se smisao te rečenice.[6]) Da se tu radi o eksperimentalnoj teškoći ili upravo nemogućnosti, jamačno misli i Russell, kada početak »Newtonova« pokusa evo ovako ukratko prikazuje[7]): kablić s vodom miruje, a nalazi se unutar šire posude, koja rotira! Rezultat: površina vode ostaje ravna unatoč relativnoj rotaciji (the water will remain level in spite of the relative rotation).

U interpretaciji pokusa Stay — kako smo već rekli — pristaje uz Newtona i najposlije se tuži, kako puk ne umije razlikovati pravo i relativno gibanje, te završuje sentencijom

scilicet ille
Veris saepe quidem rebus permutat inanes.

Drukčije sudi o stvari Bošković. Razmotrimo njegove razloge.

U bilješci k Stayevim stihovima on kazuje odmah, da Newtonova interpretacija »ne važi ništa, ako se sama sila inercije ne uzme kao apsolutna[8]), o čemu ćemo niže govoriti«. Budući da sila inercije izlazi na isto kao i zakon ustrajnosti, Boškovićev prigovor Newtonu očito znači, da Newton u tumačenju pokusa nije smio upotrebiti zakon ustrajnosti s obzirom na Zemlju. Doista »niže« t. j. u bilješci k stihu 1448. istog pjevanja Stayeva epa Bošković upućuje, da ne valja zakon ustrajnosti dokazivati iz gibanja, koja opažamo »ovdje kod gušćih tjelesa«, već on izlazi kao valjan relativno spram prostora, u kojemu se nalazimo i mi i sve što vidimo, budući da je onda i zemaljska i nebeska mehanika u osobitom skladu s činjenicama (apprime conveniat).

Da ocijenimo taj prigovor, treba nam još nešto reći o Newtonovu pokusu. Prema biti svojoj taj se pokus može samo približno ostvariti. On se osniva na pretpostavci, šutke učinjenoj, da Zemlja apsolutno miruje. Samo u tom slučaju može voda s kablićem rotirati poput krutog tijela. Budući da to doista možemo postići, znak je, da Zemlja ne rotira ili bar da je njezina kutna brzina tako malena, da ne kvari pokusa primjetljivo. Doista astronomski pojavi tumačeni Newtonovom dinamikom uče, da kutna brzina kablića može biti i milijune puta veća od kutne brzine zemljine, te je pretpostava Newtonova pokusa ispunjena velikom točnošću. Samo u slučaju, da bi se pokus izveo na Polu, zemaljska vrtnja ne bi smetala nikako; onda bi trebalo kutnoj brzini vode relativno prema Zemlji algebarski pribrojiti kutnu brzinu Zemlje. Međutim ta točnost ne bi bila umjesna, jer ima jedna činjenica, koja jače kvari pokus nego li zemaljska rotacija, a to je nehomogenost gravitacije. Zbog nje mirna tekućina nije ravna, već izbočena. Ukratko: rotacija kablića s obzirom na Zemlju jest — u smislu Newtonove dinamike — s velikom približnošću isto što i apsolutna rotacija.

Bošković nastavlja: »jer ni centrifugalna sila ne nastaje iz krivocrtnog gibanja, ako se tjelesa ne bi po prirodi svojoj tjerala u pravac«. Tima riječima Bošković očito stavlja zahtjev, da bi najprije trebalo dokazati, da vrijedi zakon ustrajnosti, t. j. da tijelo nastoji gibati se u pravcu. »Niže« pak on pokazuje, da se taj zakon ne da metafizički

---

[5]) Mach, l. c. str. 212.

[6]) Bošković citirajući u bilješci Newtona izostavlja rečenicu u zagradama; v. također Rad 190. str. 34., 181. str. 99.

[7]) Bertrand Russell, The Principles of Mathematics 1903., treći put preštampano 1948., § 464.

[8]) Rad 181., str. 100.

deducirati. To ćemo rado priznati, ali moramo i Newtonu priznati opravdanost, da dinamiku izgradi aksiomatički, more geometrico, i da među aksiome uvrsti baš sam zakon ustrajnosti.

Nije nam teško osvrnuti se na prigovor, koji slijedi: »ako se Zemlja apsolutno giblje, ono apsolutno gibanje ne će biti kružno, već veoma različno«. To znači: »ako« valja Kopernikova nauka, Zemlja će ne samo rotirati, nego i obilaziti oko Sunca i stvar će biti prezamršena za interpretaciju. No već je Newtonu, pa i Boškoviću[9]) bila poznata konzekvencija Newtonove dinamike, da apsolutna jednolika translacija nekog mehanizma ne utječe na relativno gibanje njegovih česti ni na sile, tako da pokus s kablićem vode mora uroditi jednakim rezultatom, bilo da Zemlja apsolutno miruje bilo da leti apsolutnom translacijom kroz prostor. Prema tomu pokus s vodom pokazuje apsolutnu vrtnju, u smislu Newtonovu, bilo da Zemlja apsolutno miruje, bilo da je u apsolutnoj jednolikoj translaciji.

Nadalje kaže Bošković: »kada bi se Zemlja gibala gibanjem jednakim i protivnim gibanju posude, voda bi se bila nalazila baš na početku u apsolutnom gibanju, a na kraju bi bila apsolutno mirovala.« Nije teško ni na to odgovoriti. Newton — u misli — eksperimentira s vodom, a ne sa Zemljom, i njegove se izjave tiču samo onog slučaja.

»Kad bi pak Zemlja — svršava Bošković — imala gibanje prema dolje, s obzirom na nas i na kablić, voda u posudi ne bi se bila dizala, već bi se bila spuštala manje negoli kablić«. Mislim, da taj prigovor izlazi na isto kao pređašnji. U ostalom poradi obilaženja oko Sunca vazda ima točka na Zemlji, koja leti »prema dolje«.

Sve u svemu Bošković drži, da je stvar odviše zamršena, te se ne može »u samom uvodu mehanike (in ipso Mechanicae exordio) postići, da se neka sila poveže s apsolutnim gibanjem, a ne s relativnim«. To možemo priznati, ali Newton onaj pokus ne obrađuje u tančine, nego ga spominje za razjašnjenje, prije nego će postaviti aksiome i preći na sustavni razvoj svoje nauke.

No koja je svrha tih sumnja, što ih je iznio Bošković? Kada on — kako smo čuli — kaže: »ako se Zemlja apsolutno giblje«, znači, da dopušta i tu mogućnost, da Zemlja apsolutno miruje i da ne vrijedi Kopernikova nauka. Time on dolazi u susret predsudama svoje sredine, ali je jasno, što on — diplomat — misli. Ona ograda »u samom uvodu mehanike« i onaj »osobiti sklad« jasno upućuju, da je Bošković bio uvjeren o apsolutnom gibanju Zemlje u smislu Kopernikove nauke. Od astronoma 18. vijeka drugo se ni ne može očekivati. A ne valja ni to zaboraviti, da u svojoj nauci o tvarnim točkama, koja mu je toliko srcu prirasla i koju će povijest znanosti jamačno vazda visoko cijeniti, Bošković opširno pobija mišljenje, da bi ikoja tvarna točka mogla apsolutno mirovati.

Pokusi sa dvije svezane kugle. Istraživači prirode, kaže Stay (I 897-900) povodeći se za Newtonom, »dijelom po gibanjima, koja možeš opažati, dijelom i po uzrocima i učincima, t. j. po samim silama, dokučuju prava gibanja i time upoznavaju gibanja, kojih nikada ne bismo mogli opažati«.

Bošković u bilješci dodaje, da Stay ovdje misli na Newtonov drugi pokus spomenutog Sholija, naime na misleni pokus sa dvije kugle, koje su svezane koncem. Kugle mogu apsolutno obilaziti — svaka u kružnici — oko zajedničkog težišta, te iz napetosti konca slijedi, kolika je njihova apsolutna kutna brzina. A djelujući na kugle jednakim i protivnim silama mogli bismo iz promjena napetosti doznati i to, kojim se smjerovima kugle giblju.[10])

---

[9]) Dodatak § XIII, al. 69.

[10]) Rad 190., str. 32.; 181., str. 97.

Slične prigovore kao kod pređašnjeg pokusa Bošković i ovdje iznosi. »Ako naime — kaže Bošković — postoji neko zajedničko gibanje u određenu stranu, apsolutno gibanje složeno od tog zajedničkog i onog relativnog [?], koje bismo onim pokusom odredili, bilo bi veoma različno od samog onog relativnog [?] i dio, za koji bismo mi držali, da je kod gibanja stražnji, mogao bi uistinu biti prednji, i obratno«. Radi jasnoće treba odmah reći, da Bošković apsolutnu rotaciju, koja se ovdje traži, očito nehotice zove relativnim gibanjem; kugle u tom pokusu uistinu relativno miruju. Stvar je dakle ova. Sveukupno gibanje sastoji se od apsolutne rotacije oko zajedničkog težišta i od apsolutne jednolike translacije. Potonju, prema Newtonovoj nauci, ne možemo upoznati; apsolutnu rotaciju možemo. Sasvim je opravdano, da se ispita ono, što se može, t. j. ona rotacija. I ne može se prigovoriti, ako se određuje smjer rotacije same, t. j. ako se traže one točke kugala, koje bi išle naprijed, kada ne bi bilo translacije. Newton je dobro pazio, da se stvar ne zamrsi translacijom; dok naime za kugle nije ništa pretpostavio glede njihovih masa, za sile, kojima u pokusu treba na njih utjecati, izričito kazuje, da su jednake, čim je osigurano, da ni te sile ne će stvoriti translacije.

Varićak drži, da Duhem tomu Newtonovom pokusu stavlja »isti« prigovor kao i Bošković[11]). Podnipošto nemam taj dojam. Duhem tek ističe granice Newtonove dinamike, koja može pronaći apsolutne rotacije, ali ne može odrediti apsolutnih translacija. Bošković pak stvar prikazuje, kao da su i apsolutne rotacije pod sumnjom, što dakako heliocentričkoj nauci podnipošto ne bi bilo u prilog.

Bošković spominje i teškoću, koja postoji pogledom na mjerenje napetosti konca. Prigovor taj bio bi uopće opravdan, kad se ne bi i tu radilo tek o uvodnim razmatranjima Newtonova djela. Newton eto završuje Sholij riječima: »Kako se dokučuju prava gibanja iz njihovih uzroka, učinaka i primjetljivih razlika, i obrnuto, iz gibanja bilo pravih bilo primjetljivih njihovi uzroci i učinci, prikazat će se opširnije u onom što slijedi. Hunc enim in finem Tractatum sequentem composui«.

Prostor u gibanju. Boškovićeva kritika Newtonova pokusa s vodom — kako smo čuli — nije bila bezuvjetna. On ga tek »u samom uvodu mehanike« nije smatrao uvjerljivim. Jamačno je isto mislio o pokusu s kuglama, jer nije imao kritike za Newtonovu dinamiku kao cjelinu, već joj je priznavao — kako smo također čuli — veliku vrijednost. No kako se Newtonova dinamika osniva na zamisli apsolutnog prostora, Bošković je tražio i — prema svom mišljenju — našao izlaz, kako da Newtonovo djelo dovede u sklad »i s pravim i [t. j. ili] apsolutnim mirovanjem Zemlje«[12]). Evo šta on kaže[13]):

»I sve to [skladnost mehaničkih tumačenja] posve će jednako izlaziti, ako se ono nastojanje [sila tromosti] ne protegne na apsolutni prostor, već na neki prostor, koji zamišljajmo pomičan, u kojemu su sadržana sva tjelesa, što potpadaju pod naša osjećala. Ako naime zamislimo neku sfernu plohu (orbem sphericum), u kojoj smo zajedno sadržani mi i svi planeti i zvijezde, a tjelesa posjeduju silu tromosti relativno spram one plohe........ kao ljuske (veluti corticis), i ako se ta ljuska ili ploha kojimgod načinom giblje, — sva će se tjelesa, što su u njoj sadržana, posve jednako gibati jedna s obzirom na druga i s obzirom na samu ljusku, premda bi se apsolutno

---

11) Pierre Duhem, Le mouvement absolu et le mouvement relatif, 1909., str. 188. (ne: 133.).

12) Dodatak k I. pjevanju § XIII., alineja 129.

13) ib. al. 127.; od Boškovićeve rasprave § XIII. De vi inertiae preštampane su u Radu 190. otprilike dvije petine.

gibanje u praznom nepomičnom prostoru sastavljalo iz njihova relativnog gibanja i onog zajedničkog. I nitko zatvoren u onoj ljusci ne bi mogao makar kakvim pokusom spoznati, postoji li neko gibanje one ljuske i kakvo upravo jest, ako postoji. Svi bi naime pojavi slijedili jednakim načinom...«

Bošković nastavlja[14]):

»...neka taj prostor [t. j. onaj, što ga sadržaje ploha ili ljuska] neko vrijeme miruje; imat ćemo onda apsolutno gibanje Zemlje, kakvo sami newtonovci zahtijevaju. Ali neka se taj prostor počne gibati gibanjima, koja su sva protivna i jednaka onima, kojima se gibala Zemlja. Zemlja će sama s obzirom na taj prostor nastaviti gibanje istim načinom kao prije, ali to ne će biti apsolutno gibanje. Apsolutno će ona posve mirovati, jer će je sam pomični prostor toliko vući natrag, koliko u tom samom prostoru napreduje poradi ostalih sila, koje ne rađaju njezino apsolutno gibanje, već sprečavaju njezinu translaciju«.

I tako bi dakle — prema Boškoviću — moglo biti, da Zemlja apsolutno miruje. On ovdje implicite zamišlja, da je Zemlja kruta, jer bi samo onda apsolutno gibanje pomičnog krutog prostora moglo paralizirati relativno gibanje svih djelića zemaljskih, te bi mogli apsolutno mirovati i Jozuin Gabaon i sva druga mjesta Zemlje. Kako to, da svaka geometrijska točka pomičnog prostora ima tu moć, da svoju apsolutnu brzinu nametne kao komponentu čestici svijeta, koja se s točkom poklapa, toga Bošković nije kušao objasniti. A ni to, zašto mora to djelovanje pomičnog prostora našemu iskustvu ostati neprimjetno. Najčudnije pak možda jest, da bi pomični prostor mogao svojim apsolutnim gibanjem oponašati sva ona zapletena relativna gibanja zemljina, što ih upoznaje astronomija. Zemlja bi onda svojim apsolutnim mirovanjem nametnula apsolutno gibanje pomičnom prostoru i posredno svima nebeskim tjelesima. Kada je g. 1892. postavljena hipoteza kontrakcije, osjećalo se kao velik njezin nedostatak, što nije bila dinamički objašnjena, već samo ad hoc izmišljena, da učini shvatljivim rezultat jednog jedinog pokusa, Michelsonova iz g. 1881. Ta se hipoteza međutim iza malo godina preobrazila u znamenitu tvrdnju, koja prirodno i jednostavno izvire iz Einsteinove relativističke nauke. U prispodobi s time Boškovićeva hipoteza pomičnog prostora izmišljena je, da se shvati apsolutno mirovanje Zemlje, ako ono postoji. Ona je ostala neprotumačena, jer je po biti svojoj neprotumačiva.

Ta igra Boškovićeva duha daje nam misliti na Tihonovu nauku i to njezin stariji oblik, kad je Tiho zamišljao svu Zemlju, a ne samo os njezinu apsolutno mirnom. Kako je Tihonov sustav neki obrat Kopernikova, u sličnu je snošaju Boškovićeva koncepcija prema Keplerovim i Newtonovim otkrićima. Tek je razlika, da Bošković ne tvrdi, da Zemlja doista apsolutno miruje, već samo to, da to nije nemoguće.

Da ne bi ipak preveliku važnost pridijelio Zemlji, Bošković pod kraj svojih razlaganja[15]) kazuje, da bi onaj pomični prostor mogao imati gibanje »protivno gibanju zemaljskom relativnom s obzirom na taj prostor ili protivno relativnom gibanju Jupiterovu ili Saturnovu ili gibanju kojeg god nebeskog tijela ili koje god tvarne točke smještene u tom prostoru ili [bi mogao imati] drugo koje god gibanje o njima sasvim nezavisno, te bi apsolutno mirovala ili Zemlja ili Jupiter ili Saturn ili ma koja god tvarna točka ili nijedna. To će stajati do volje Stvoritelja, koji...«

Bošković kaže, da je te misli iznio prvi put u raspravi o plimi, De maris aestu (1747. g.). On ih ponavlja u svojem i Maireovu djelu o mjerenju meridijana Rim-Rimini, De litteraria expedi-

---

[14]) ib. al. 129.
[15]) ib. al. 130.

tione, koje je kao i prvi svezak Stayeva epa izašlo g. 1755., ali nešto kasnije. Tamo on veli[16]), da je tu svoju teoriju »još na više drugih mjesta razložio i utvrdio, ali nedavno najjasnije (luculentissime)« u Stayevu djelu. Noviji i nešto skraćeni prikaz može nas po tom zanimati, što se u njemu doduše kazuje, da smo »zatvoreni« u onom pomičnom prostoru, ali se ne spominju granice njegove: ona sferna ploha ili ljuska. Time je Bošković iz tog svog prikaza izbacio jednu zanimljivo primitivnu misao. Među recima ljuska je dakako ostala, jer u čemu bismo inače bili zatvoreni? Takav prostor omeđen plohama nalazimo u Ivana Filopona. Taj komentator Aristotela, prozvan također Gramatik ili Kršćanin, živio je u 7. stoljeću i — prema Duhemu[17]) — jednako je zamišljao apsolutni prostor kao i Newton[18]). No kako nije priznavao praznog prostora, bilo mu je odbiti prigovor, da prostor ne može biti beskrajan, jer ni svijet nije beskrajan. On je zato zamislio prostor omeđen geometrijskom plohom baš tolike veličine, da obuhvati svijet.

S obzirom na tu plohu zanimljiv je međutim najstariji Boškovićev prikaz toga predmeta. Taj je i najopširniji. Tko nikako ne bi htio prihvatiti konačan, samo zamišljen prostor u zamišljenom beskonačnom nepomičnom, taj — kaže Bošković[18 bis]) — neka zamisli tri zbiljske ljuske (orbes), sačinjene iz tvari, jednu u drugoj: 1) izvanja, sva jednako debela, sasvim nepomična, firmamentum; 2) u njoj koncentrična, koja izvodi dnevnu vrtnju, primum mobile; 3) u njoj zvjezdano nebo, čije središte opisuje perturbiranu elipsu, jednaku stazi, što je u Newtonovoj nauci Zemlja opisuje protivnim smjerom. Treća ljuska obuhvata sve zvijezde i s obzirom na nju vrijedi sila tromosti. Oslanjajući se na taj model Bošković nastoji pokazati, da je apsolutno mirovanje Zemlje u skladu s Newtonovom naukom. Zanimljiva je izvanja ljuska, jer ona nije drugo nego konkretno, krupno predočeno tijelo alfa (Carl Neumann, g. 1870.).

Dodajmo, da i gibanje prostora nalazimo u starini: kod Aristotelovih komentatora Damaščanina i njegova učenika Simplicija, u 6. stoljeću[19]). A god. 1277. osudili su pariski teolozi kao krivu nauku mišljenje, »da Bog ne može pomicati neba gibanjem u pravcu«[20]).

God. 1770. izašao je francuski prevod Maireova i Boškovićeva djela. U tom prevodu nalazimo sitnu izmjenu na onom mjestu, gdje se spominje Jupiter[21]). Dok u izvorniku čitamo: vel Telluris, vel Jovis, vel cujuscunque puncti materiae, u prevodu stoji: de la Terre, ou de Jupiter, ou de quelqu'autre portion de matière. Tu se već ne dopušta, da bi tvarna točka mogla apsolutno mirovati, već samo komad tvari, što očito znači hrpu mnogo tvarnih točaka. Ta je izmjena razumljiva, jer ovdje je Bošković bio protuslovio samom sebi. Na raznim naime mjestima, pa i u samom Stayevu

---

[16]) Maire-Boscovich, De litt. exp., Opusculum V., al. 12.

[17]) Duhem, l. c. str. 186., 25., 26.

[18]) L. Lange l. c. str. 384. upućuje, da je Newton zamisao realnog, nematerijalnog prostora našao kod svog starijeg znanca cambridgeskog platoniste Henrya Morea, a ideju jedinstva prostora kod Galileja. L. T. More, Isaac Newton, A Biography, 1934., str. 553., kaže, da je upliv tog filozofa na Newtonove nazore o prostoru, vremenu i Bogu bio neposredan i jak i da bi zaslužio, da se pobliže ispita.

[18 bis]) De maris aestu, Rim, 1747., alineja 71.

[19]) Duhem, l. c. str. 31.

[20]) Duhem, l. c. str. 61.

[21]) Maire-Boscovich, Voyage astronomique.

djelu,[22]) Bošković — kako smo već prije spomenuli — nauča i dokazuje, da nema tvarne točke, koja potpuno miruje. Taj bi se ispravak dakle mogao shvatiti samo tako, da se eventualno apsolutno mirovanje može pripisati Zemlji ili kojem drugom tijelu samo prosječno, kao cjelini, a podnipošto pojedinim tvarnim točkama. Sve u svemu ideja apsolutnog mirovanja — uza svu Boškovićevu koncilijantnost — najposlije se ipak malone posve gubi. Tako možemo stvar prosuđivati na osnovu Dodatka § XIII. i spomenutog ispravka.

No i onda ostaje jedno protuslovlje. Oni Stayevi stihovi tiču se Descartesova cogito ergo sum. Da pobije Descartesa, Stay kaže, da duša postoji i onda, kada ne misli, na pr. u snu, i za prispodobu spominje analogiju kod tjelesa: ona svoju prirodu pridržavaju i onda, kada miruju;

veluti quoque corpora saepe moveri
Cernimus, & propriam naturam immota tueri.

Bošković Stayeve riječi mirujuća tjelesa uzimlje za povod, da izjavi, da nema mirovanja; i to ne vrijedi samo za tvarnu točku već i za tijelo. I da ipak citirani Stayevi stihovi ne izgube svako značenje, Bošković svršava[23]): »Još uvijek međutim, ako Stvoritelj Prirode (sic) nametne tvari silu i učini da miruje, ne bi zato tvar svoju prirodu (sic) odložila«. Tu se dakle svako (apsolutno) mirovanje proglašuje čudom.

Do mišljenja, da nema apsolutnog mirovanja, Bošković dolazi — možemo reći — metafizičkim umovanjem. U općem neznanju, na koje smo pogledom na apsolutno gibanje — prema Boškoviću — osuđeni, to je mišljenje iznimka, jer o apsolutnom gibanju ipak nešto kazuje, ako i negativno.

Boškovićeva izjava god. 1746. U raspravi De cometis, publicirano g. 1746., pala je Boškovićeva izjava, da će smatrati Zemlju mirnom: Newtonus... terram movet, nos immotam statuemus[24]). On je to izjavio pozivljući se na Sv. Pismo i na dekrete inkvizicije. God. 1785. ta je rasprava nanovo štampana u Opera pertinentia ad opticam et astronomiam, pa je tom zgodom Bošković dodao bilješku, kojom se odriče one izjave. Mlađi Littrow (Carl) spominje taj preokret Boškovićev u Kalender für alle Stände, godištu 1873., ironizirajući, pa Littrowljevu »anegdotu« doslovce prenosi i poznati astronom Rudolf Wolf[25]), koji je inače Boškovićeve zasluge visoko cijenio[26]). Varićak međutim ne drži, da »Bošković na onom mjestu počinja sacrificium intellectus«, kako je to tvrdio Seydler[27]). Mislim, da se toj Varićakovoj napomeni može još ovo dodati.

Gore izložena Boškovićeva zamisao prostora, koji se giblje, dolazi — u zametku — već u toj raspravi, dakle g. 1746. Prostor, s obzirom na koji vrijedi zakon ustrajnosti i Newtonov zakon gravitacije, može se gibati baš tako, da će »Zemlja mirovati apsolutnim mirom i realnim s obzirom na apsolutni prostor, a gibat će se samo respektivnim gibanjem...« Toj svojoj ideji prostora, koji se giblje, Bošković ostaje vjeran do pred smrt, jer je eto spominje i g. 1785. u bilješkama k onoj radnji.

---

[22]) U bilješci k stihu I 153 tamo stoji: Et quidem ego omnino arbitror, nullum esse materiae punctum, quod perfecte quiescat. Slično nalazimo u sasvim kratkom Dodatku k tomu stihu: § II. De motu materiae necessario; taj Dodatak obuhvata svega 4 alineje, 16. do 19.

[23]) Dodatak § II.

[24]) Varićak, Rad 181., str. 82.

[25]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, 1877.

[26]) Varićak, ib. str. 127., posljednja bilješka.

[27]) Časopis pro pěstováni math. a fys., XVI; Varićak, ib. str. 93.

Sve se svodi — kaže tamo Bošković — na pitanje, vrijedi li zakon ustrajnosti s obzirom na apsolutni prostor, što je Newtonova nauka, ili na neki prostor, koji se giblje[28]). Koliko god nam se to Boškovićevo umovanje može činiti čudnim, ono možda nije čudnije nego li sama zamisao apsolutnog gibanja, gibanja s obzirom na n i š t a. Bošković je i nehotice onom svojom koncepcijom ideju apsolutnog prostora i apsolutnog gibanja doveo do apsurda.

S toga stajališta Boškoviću nije bilo preteško g. 1746. priznati apsolutno mirovanje Zemlje, kada su to tako tražili bogoslovci, a još lakše mu je bilo g. 1785. odreći se toga. Uostalom pitanje, da li prostor, s obzirom na koji vrijedi zakon ustrajnosti, apsolutno miruje ili se on giblje, po Boškoviću je — god. 1785. — stvar, koja se tiče samo bogoslovaca (p e r t i n e t a d t h e o l o g o s)[29]).

Pogledom na Seydlerove riječi, da je Bošković n e z ř í d k a (n e r i j e t k o, dakle č e s t o) protiv svog uvjerenja šiju prignuo pod autoritetom isusovaca, možemo istaći, da Seydler tu o p ć u tvrdnju ničim drugim ne potkrepljuje, već samo spomenutim Boškovićevim izjavama, koje prevodi, kako bi se lako moglo pokazati, iz Littrowljeva njemačkog prevoda. Taj je pak prevod ponešto prilagođen potrebi anegdote. Bošković na pr. veli: n o s . . . i m m o t a m s t a t u e m u s, dakle: j a ć u s t a v i t i, d a j e n e p o m i č n a. Ako to Littrow (i slično Seydler) prevodi: h a l t e i c h d i e E r d e f ü r u n b e w e g l i c h, mislim da to ipak nije isto kao Boškovićev futur s t a t u e m u s.

U bilješkama k Nocetijevoj pjesmi o polarnoj svjetlosti[30]) Bošković otvoreno priznaje, da je dugo razmišljao, mogu li se kojim načinom nove tekovine znanosti dovesti u sklad s mirovanjem Zemlje. »I taj moj toliki trud — kaže on — nije bio uzaludan, bar po mom mišljenju« (N e c t a n t u s l a b o r, n o s t r o q u i d e m j u d i c i o, i r r i t u s n o b i s c e s s i t). Urodio je koncepcijom prostora, koji se giblje, i s time je — po Boškoviću — doveo sve u sklad.

U svezi s time vrijedno je još reći, što Bošković g. 1746. kazuje u pogledu svjetlosti. Ako se prihvati, da je Zemlja mirna, treba za čestice svjetlosti zamišljati, da i one s nebeskim tjelesima učestvuju u godišnjem gibanju zajedno sa Suncem i u dnevnoj vrtnji oko zemaljske osi[31]). A kada čestica svjetlosti udari u Zemlju, gubi ta gibanja, te odbijena stizava k oku pravcem.

Nedokučljivost apsolutne veličine. U potkrepu teze, da je Bošković relativista, navodi se i njegova tvrdnja, da bi se svijet mogao stegnuti i da mi toga ipak ne bismo mogli opaziti (Rad 181., str. 91.; 190., str. 36.); u općem stegnuću stegla bi se i naša mjerila dužine. Međutim takvo shvaćanje sasvim je u duhu pristajanja uz apsolutni prostor. U pozadini svijeta, koji motrimo, i čovječjih mjerila tu se nazire neki neodređeni apsolutni prostor i maglovito apsolutno mjerilo, bez kojega se ne može reći, da nešto postaje apsolutno manje.

Varićak, g. 1910., upućuje na to, da i Poincaré iznosi taj primjer. A g. 1922. izdao je Dušan Nedeljković u Parizu knjigu L a p h i l o s o p h i e n a t u r e l l e e t r e l a t i v i s t e d e R.-J. B o s c o v i c h, pp. 228, gdje na str. 69. čitamo u svezi sa Boškovićevom tvrdnjom: »Jedno i pol stoljeća iza Boškovića Henri Poincaré zamišlja malne identično relativnost prostora i vrlo analognim načinom sam prostor«. Einsteinova nauka nije u tom djelu dodirnuta, a nisu u njem spomenuti ni

---

28) Opera pertin. ... III, str. 318.

29) Opera, ib. str. 319.

30) Noceti, D e I r i d e e t A u r o r a B o r e a l i c a r m i n a, c u m n o t i s J o s. R o g. B o s c o v i c h, 1747., str. 116.; Torbar, Rad 87-88-90, str. 464.; Varićak l. c.

31) Opera ... III, str. 324., 325.

Mach ni H. A. Lorentz. Isti pisac g. 1949. u članku Ruđer Bošković — atomista i začetnik teorije relativiteta[32]) zove Boškovićevu nauku »relativistička atomistika«.

No što se tiče Poincaréa, treba reći, da on onu tvrdnju doista objašnjava relativistički[33]). Ali prema Poincaréu zamisao onakvog prevrata u svijetu ima smisla samo za onoga, koji zaključuje, kanda je prostor apsolutan; uistinu ne bi se moglo ništa takova dogoditi, dakle ni opaziti. Evo Poincaréovih riječi:

> En réalité, ce boulversement n'existe que pour ceux qui raisonnent comme si l'espace était absolu. Si j'ai raisonné un instant comme eux, c'est pour mieux faire voir que leur façon de voir implique contradiction. En réalité, il vaudrait mieux dire que l'espace étant relatif, il ne s'est rien passé du tout et que c'est pour cela que nous ne nous sommes aperçus de rien.

Ta negativna, relativistička ocjena one tvrdnje tiče se Delboeufa, koji se pri njoj »naročito zadržao«. Jasno je, da je smijemo protegnuti i na Boškovića, te možemo reći, da — prema Poincaréovu shvaćanju — Bošković zaključuje, »kanda je prostor apsolutan«.

Bošković nije propustio spomenuti, da bi trebalo pri tom stegnuću svijeta razmjerno smanjiti sile, koje djeluju među atomima-točkama. Da je to nuždan uvjet, vidimo i bez formula. Kada bi se u neki čas svi razmaci atoma i sve brzine njihove smanjili na stotinku, trebalo bi u isti čas da nastupi još veće čudo, da se promijeni zakon sila i da se od onog časa smanje na stotinku i sile, tako da akceleracije i razmaci u kojigod čas iza toga budu sto puta manji, nego što bi bili, da nije bilo stegnuća. Jednostavan primjer dinamičke sličnosti.

Bošković to izjavljuje ovim riječima:

> Et si minuerentur etiam distantiae illae omnes... manente illarum ratione ad se invicem, vires autem ex ea distantiarum mutatione non mutarentur, rite mutata virium scala illa, nimirum curva illa linea, per cujus ordinatas ipsae vires exprimuntur; nullam nos in nostris ideis mutationem haberemus (Rad 190., str. 36.).

To će reći: »I kada bi se smanjili svi oni razmaci... pridržavši svoje međusobne omjere, a sile se zbog te promjene razmaka [prividno] ne bi promijenile, jer se primjereno promijenila ona ljestvica sila, naime ona kriva crta, čijim se ordinatama sile izražavaju; [onda] nikakve promjene ne bi bilo u našim predodžbama«.

Bošković se ovdje nije najsretnije izrazio i ta njegova rečenica iziskuje neko razjašnjenje. Ovdje riječ vires, gdje se prvi put spominje, znači prividne sile, jer apsolutno sile su se u zamišljenom stegnuću smanjile; »ona ljestvica sila« ili — moglo bi se reći — onaj spektar sila jest zorni prikaz zakona sila, naime Boškovićeva krivulja; ta se smanjila, kao da je precrtana pantografom. Promjena sila upravo je uvjet, da ono čudo dobije smisao, i rečenica vires autem... ide u protazu.

»Odatle slijedi« — dodaje Bošković — i ovo: »moglo bi biti, da se na isti način svijet, koji vidimo, iz danâ u dane [dakle: neprestance] steže ili rasteže uz baš toliko stezanje ili rastezanje ljestvice sila«, pa ni u tom slučaju ne bismo osjetili promjene. (Fieri autem posset, ut totus itidem Mundus nobis conspicuus in dies contraheretur vel produceretur, scala virium tantundem contracta vel producta..., Rad 190., str. 36. i 37.) Ne će biti suvišno, ako naglasimo, da je to nova tvrdnja, različna

---

[32]) U časopisu Nauka i priroda, Beograd god. II., str. 515.

[33]) Science et Méthode l. c

od one prеđašnje. Već riječi »odatle slijedi« na to upućuju. U prvom se slučaju uzelo, da u jedan tren atomi preskoče u nova mjesta i u isti se tren promijeni zakon sila, pa se od tog časa atomi iz novih svojih mjesta giblju u skladu s novim zakonom sila. U drugom se slučaju zakon sila neprestance i bez skokova mijenja i svijet se neprestance, bez skokova, širi ili steže i sve se to zbiva razmjerno. To može značiti — mislim — samo ovo. Kada bi počevši od časa $t = 0$ zakon sila ostao nepromijenjen, koordinate tvarnih točaka bile bi počevši od tog časa funkcije vremena, koje bilježimo x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, $x_3, \ldots$; budući da se zakon sila mijenja, koordinate će biti ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, $\xi_3, \ldots$ i bit će redom razmjerne sa $x_1, y_1, \ldots$, dakle $\xi_1 = \lambda x_1$, $\eta_1 = \lambda y_1, \ldots$; faktor razmjernosti λ jest **funkcija vremena**, koja u čas $t = 0$ ima vrijednost 1. Ako razmak i-te i k-te točke bilježimo r_{ik}, kada se zakon sila ne mijenja, a ϱ_{ik}, kada se mijenja, bit će $\varrho_{ik} = \lambda r_{ik}$. Ako je u prvom slučaju sila među dvije točke $f(r_{ik})$, u slučaju da se zakon sila mijenja bit će — prema Boškoviću — sila $= \lambda f(r_{ik}) = \lambda f(\varrho_{ik}/\lambda)$.

Bošković nije razložio, kakvim zaključivanjem taj drugi primjer dinamičke sličnosti slijedi iz prvog. Bit će da neka takva sličnost ni ne postoji. Možemo to ovako objasniti. Za veličine $x_1, \ldots$ vrijede diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = f(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \ldots, \text{ itd.,} \tag{1}$$

za koordinate $\xi_1, \ldots$

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = \lambda f(\varrho_{12}/\lambda) \frac{\xi_1 - \xi_2}{\varrho_{12}} + \ldots, \text{ itd.} \tag{2}$$

(Masa atoma = 1.) Ako u (2) supstituiramo $\xi_1 = \lambda x_1, \ldots$, izlazi

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d^2(\lambda x_1)}{dt^2} = f(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + \ldots, \text{ itd.} \tag{3}$$

Jednadžbe (3) bit će redom identične sa (1), tek ako stavimo λ = **konstantno**, te je s obzirom na početni uvjet $\lambda = 1$.

Bošković iznosi te misli o promjeni veličine svijeta u preglednom nizu od dva puta 3 t. j. svega 6 vrsti apsolutnih promjena, koje ne bismo mogli opaziti. Prva trojka obuhvata ove slučajeve: 1. da se svijet »paralelno« **pomakne**, 2. da se **zakrene**, 3. da se **stegne**. Da se u tim primjerima ne bi dalo razlikovati novo stanje od staroga, to doista slijedi i iz Newtonove nauke. Po njoj mi tako reći ne znamo, gdje smo u apsolutnom prostoru, kamo smo orijentirani, a ni to, koja nam je apsolutna veličina. Teško je zamisliti do kraja te imaginarne događaje; svakako bi trebalo da takvu promjenu, kad bi se dogodila, sretno prespavamo. Iz tih prvih triju mogućnosti Boškoviću slijede još tri, i to takve, gdje se smještaj ili orijentacija ili veličina svijeta mijenjaju neprekidno; t. j. 4. da se svijet paralelno **pomiče**, 5. da se **okreće**, i 6. da se **steže** ili rasteže, kako smo prije razmotrili. Četvrti je slučaj u skladu s Newtonovom mehanikom, ako je ono gibanje jednoliko. Za 5. mogućnost primjer je Zemlja, za koju se — prema Boškoviću — ne da reći, kakva joj je apsolutna vrtnja.

Držim, da ni Franjo Marković (g. 1888.)[34] ni Varićak ni Nedeljković nisu u svemu vjerno prikazali tih Boškovićevih misli.

---

[34]) Filosofijski rad Rugjera Josipa Boškovića. Rad 87-88-90, str. 543.—716. (v. str. 616., 617.)

Poput Boškovića kazuje i Stay, da je mijenjanje ljestvice sila uvjet mijenjanju veličine svijeta. No Stay je uvjeren, da se uistinu svijet ne steže ni ne rasteže i da su zakoni prirode uvijek isti (X. pjevanje, stih 2030.—2032.). Bošković naprotiv smatra, da je to Stayevo mišljenje puka hipoteza[35]).

Jedva se može raspravljati o tima stvarima i da ne mislimo na današnju hipotezu ekspanzije svijeta. Od hipoteze rastezanja Boškovića je kanda više zaokupila misao stezanja. Pomišljajući na stezanje svijeta makar do veličine lopte ili šiljka igle mogao je bit svojih atoma točaka osobito napadno prikazati. Hubbleova hipoteza ekspanzije plod je interpretacije novih empiričkih činjenica, dok mijenjanje veličine svijeta, kako ga Bošković zamišlja, opažanju je načelno nedokučljivo. Boškovićevo mišljenje proizašlo je iz njegova pristajanja uz nauku o apsolutnom prostoru i veličina svijeta mijenja se — kako on kaže — s »razloga nama posve nepoznatih«; danas, jedna je od zadaća astrofizike, da ekspanziju svijeta, ako ona postoji, shvati u njezinoj zakonitosti, na osnovu novih nazora o prostoru.

Zaključak. Bilo je eto obilno prilike, da vidimo, kako se Bošković bez sustezanja služi pojmom apsolutnog gibanja. Ali on tvrdi, da se ni za koje tijelo ne može saznati, kakvo mu je apsolutno gibanje. I napose za Zemlju kaže, da ne možemo odgovoriti na pitanje, giblje li se ona ili miruje. Ako je sama ta zamisao nedokučljivosti apsolutnog gibanja kriterij relativističkog naziranja, Bošković je relativista. No slijedeći Huygensa, Macha, Poincaréa i Einsteina relativistika ne priznaje apsolutnog gibanja i briše taj pojam iz znanstvenog rječnika. U njihovu smislu — Bošković nije relativista.

STAY AND BOŠKOVIĆ ON ABSOLUTE MOTION

By Dr. Stanko Hondl, Zagreb

Summary

The Ragusan Stay (1714—1801) in his newer work on the nature*) explains space and motion in the manner of Newton. Stay's friend and fellow-citizen Boscovich (Bošković), in the Adnotationes and Supplementa to Stay's opus, offers different views about this argument. The author examines these views and discusses Boscovich' concept of a Newtonian space in movement and his belief that the size of the world is changing.

It is sometimes maintained that Boscovich was an adherent of relativity. Indeed, Boscovich affirms that we cannot discover any absolute motion, but he is convinced that every atom is in absolute motion and he never expressed doubts regarding the existence of an absolute space.

---

[35]) v. Marković l. c. str. 706.—707.

*) Philosophiae recentioris versibus traditae libri X, Romae 1755-1760-1792 (24221 hexameters).

O GERSTNEROVIM I STOKESOVIM VALOVIMA

Dr. F. I. Havliček, Zagreb

U udžbenicima hidrodinamike prikazuju se Gerstnerovi i Stokesovi valovi posebno. Možemo pokazati, da postoji među njima uska veza, ako Gerstnerovim valovima superponiramo takav uvjet, da postanu nevrtložni.

Pratimo li Gerstnerove valove, onda vrijedi za površinu

$$x = x' - r \sin \varkappa x' ; \quad y = y_0 + r \cos \varkappa x' ; \quad x' = x_0 - ct ; \quad \varkappa = 2\pi/\lambda .$$

Rotor ovih valova $\quad rot_z \vec{v} = \dfrac{2 c \varkappa^3 r_0^2 e^{2\varkappa y_0}}{1 - r_0^2 \varkappa^2 e^{2\varkappa y_0}}$

izjednačimo pomoću gradijenta x komponente brzine duž y osovine

$$\frac{dw_y}{dy} = - rot_z \vec{v} .$$

te slijedi brzina transporta vode uslijed valova

$$w_y = - \int rot_z \vec{v}\, dy = - c \ln \left(1 - \varkappa^2 r_0^2 e^{2\varkappa y_0}\right) ,$$

Razvijamo li u red, onda je

$$w_y \doteq c \varkappa^2 r_0^2 e^{2\varkappa y_0} + \ldots$$

Ova vrijednost je identična sa onom za Stokesove valove.

Sa ovom brzinom korigiramo gornje koordinate Gerstnerovih valova, te je za površinu ($y_0 = 0$):

$$x = x' \left(1 - \varkappa^2 r_0^2\right) - r_0 \sin \varkappa x' ; \quad y = r_0 \cos \varkappa x' .$$

Derivacijom po vremenu slijede brzine

$$\dot{x} = - c \left(1 - \varkappa^2 r_0^2\right) + \varkappa c r \cos \varkappa x' ; \quad \dot{y} = \varkappa c r \sin \varkappa x' .$$

Uvrstimo li u Bernoullijevu jednadžbu:

$$\frac{v^2}{2} + \varphi = \text{const} - \frac{p}{\varrho} ; \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 ; \quad \varphi = g r_0 \cos \varkappa x' ,$$

onda mora faktor pred funkcijom vremena, $\cos \varkappa x'$ biti jednak nuli za stacionarne valove, dakle

$$g - c^2 \left(1 - \varkappa^2 r_0^2\right) \varkappa = 0 ,$$

ili

$$c = \sqrt{\frac{g}{\varkappa \left(1 - \varkappa^2 r_0^2\right)}} \sim \sqrt{\frac{g}{\varkappa} \left(1 + r_0^2 \varkappa^2\right)} .$$

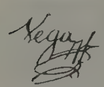
To je opet brzina valova prema Stokesovoj potencijalnoj teoriji.

Eksperimentalno možemo kontrolirati transport vode na površini sa slijedećom aparaturom. Tanka cijev dovoljne dužine nosi na jednom kraju teži balon i recimo u polovici lagani balon. Težina težeg balona drži cijev vertikalno u vodi tako, da se samo mali komad nalazi nad površinom. Postoji li transport vode, koji traži svaka potencijalna teorija, morat ćemo konstatirati gibanje malih čestica na površini s obzirom na mjesto tanke cijevi, koja je fiksirana u dubljim vodama, ako prolaze valovi. (Pokus se mora vršiti u dovoljno dubokoj vodi, za vrijeme tišine, recimo kod mrtvog mora ili kad brod prolazi).

Dr. Fedor Mikič:

JURIJ VEGA

23. III. 1754.—17. IX. 1802.



Veliki slovenski naučenjak, matematičar i astronom Jurij Vega* je rođen 1754. godine u obitelji seljaka srednjaka — Slovenci kažu »polgruntarja« — u zaseoku Zagorica kod Moravča (u blizini Ljubljane). Ime Vegine familije nije stabilizirano. U Zagorici pojavljuje se to ime sa djedom Josipom sinom Gašperja (pradjeda) iz obližnjeg sela Sv. Trojica. Od onda se rođena kuća našeg Vege u Zagorici br. 10 zvala »pri Vehovcu«. Otac mu se zvao Jernej, a majka Helena Veha. Naš Jurij zabilježen je u matičnoj knjizi rođenih kao Vecha, isto tako i njegova najstarija sestra Marija, dok su srednju sestru, Jericu, upisali kao Vehovez, a najmlađu, Apoloniju, kao Weha. Svoje ime iz Veche u Vegu promjenio je istom nakon ulaska u vojsku. Veliki uspjesi na naučnom polju, koji su ga, primjenjeni u ratnoj vještini, doveli i do uspjeha u ratu, te do viteza reda Marije Terezije, nisu dozvolili historičaru J. Hirtenfeldu, da Vegu proglasi slovenskim seljačkim sinom, već izmišljenim potomkom španskih plemića de Vega. Ispitivanjem izvornih matičnih knjiga, zapisnika o desetinskom porezu i starih urbarija u Moravčama stavio je Fr. Hauptmann istinu na pravo mjesto.

Seljačka djeca onog vremena i kraja uživala su pored siromaštva, uz komadićak uobičajenog crnog kruha, prirodne krasote gornje Savske doline i slobodu pastira, koju su vjerojatno rano zamijenili teškim seljačkim radom. Tako je morao živjeti i naš Jurij do 13. godine starosti, kad ga 1767. godine susrećemo u 1. razredu ljubljanske gimnazije.

Iako vrlo nadaren, što je navelo njegovu okolinu da ga šalje u školu, ipak je morao proći i tešku školu života siromašnog slovenskog studenta. Njegov je životni put tipičan za postanak slovenske inteligencije i njezin križni put. Otac mu je umro jako rano, tako da Jurij nije mogao računati na izdašniju pomoć od kuće. Zbog toga je bio upućen na tuđu potporu. Tadašnji siromašni đaci živjeli su životom najsiromašnijeg proletera i prosjaka. Hranili su se po bogatim kućama, danas tu, sutra tamo, ili po crkvenim dobrotvornim institucijama, gdje su dobivali ostatke hrane, većinom samo jedamput na dan. Stanovali su u zajednici sa gradskim proletarijatom, stisnuti u prostorijama sličnima više na špilju nego na stan. Nije čudo da je mnoštvo tih mladih ljudi

---

* Osnovi ovog prikaza jesu: 1) F. Kaučić, Georg Freiherr von Vega, 2. izd., Beč 1904. 2) L. Čermelj, J. Vega, ob 150-letnici Vegovega logaritmovnika; Življenje in svet XIV/20. Ljubljana, 12. XI. 1933. 3) Originalni Vegini radovi.

stradalo životom mnogo prije nego što su postigli svoj željeni cilj, priličan dio pokosila je tuberkuloza. Kad su malo poodrasli, izdržavali su se nadareni siromašni mladići instrukcijama djece iz bogatih gradskih obitelji. Takvim životom živio je i naš Vega. Tek kad je profesor matematike Josip Mafej (Maffei) otkrio njegov matematički talenat i zauzeo se svojski za njega, postao je đački život Vege nešto lakši.

U doba mladog Vege prolazila su slovenska djeca pored materijalnog, te socijalnog i svoj moralni križni put. Sve su škole bile njemačke, počevši od prvog razreda osnovne škole. U srednjim školama su jezuiti imali monopol na odgoj. U tim se prilikama spomenuti profesor Mafej, kasniji prelat u Češkoj, pokazao plemenitim čovjekom. Bio je vanredan pedagog i mentor, a Vegu je podupirao i materijalno. Kad je u Vegi otkrio matematički talent, koji se budio, Mafej je oduševio mladića za studij matematike. Dao mu je potrebnu osnovu, na kojoj je mogao dalje izgrađivati svoje znanje. I Vega se pokazao čovjekom, jer nije zaboravio svog učitelja — prvi veći stručni rad, logaritamske tablice, posvetio je Mafeju.

Ljubljanski licej apsolvirao je Vega 1775. godine. Odmah, tek 21 godinu star, dobio je zbog temeljitog znanja matematike namještenje u svojstvu navigacijskog inženjera u tadašnjoj Nutarnjoj Austriji, uz godišnju plaću od 600 forinti. Njegova je, izgleda, zadaća bila, da vrši nadzor kod raznih gradnja na rijekama određenog područja. Vegi pripisuju i ideju izgradnje i prve nacrte Gruberovog kanala, kojim se trebalo sanirati ljubljansko Barje, t. j. odtok vode iz močvarne ljubljanske okoline posebnim kanalom.

Poslije 4—5 godina ostavio je Vega službu navigacijskog inženjera i prijavio se u vojsku. Bit će da mu je postalo jasno, da se kao navigacijski inženjer ne će moći razviti, te da njegove sklonosti matematici ne će doći do punog izražaja. Račun se pokazao točnim. Počeo je kao običan vojnik u artiljeriji. Nakon godinu dana postigao je čin potporučnika, a skoro iza toga bio je imenovan učiteljem matematike u pukovskoj artiljerijskoj školi.

Kritički stav prema nedostacima vojničke škole, iz koje je tako reći, upravo izašao, potakli su ga na energičan i intenzivan rad. Opazio je pomanjkanje pravog sistema kod predavanja, naročito u pogledu prikladnih udžbenika. U najkraćem vremenu svršio je svoje prvo stručno djelo, prvi dio matematičkih predavanja pod naslovom: »Vorlesungen über die Mathematik sowohl überhaupt zu mehrer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den k. k. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des k. k. Artilleriekorps eingerichtet. I. Band, die allgemeine Rechenkunst enthaltend«. To je djelo izašlo 1782. godine u 1.500 primjeraka. Sadržaje u glavnom elementarnu aritmetiku i algebru. Pisano je toliko jasno i lako razumljivo, da je primljeno od kritike i od publike s oduševljenjem. Kao izraz simpatije s kojom je knjiga primljena karakteristična je superlativna izjava vojvode-učenjaka Ernesta II. Saksonsko-Gothanskoga, da je Vega novi Euler.

Objektivno mjerilo za uspjeh Veginog prvijenca je broj daljnjih izdanja, u svemu njih sedam, te 70 godišnja upotreba u vojničkim i civilnim školama Austrije. Zadnje, sedmo, izdanje tog udžbenika izašlo je 1850. godine.

Vega je bio uvjeren da nema valjane artiljerije bez temeljitog znanja matematike. Iako se služio njemačkim, francuskim i talijanskim udžbenicima kao uzorom, on je unio u svoj udžbenik vlastiti duh i rezultate vlastitih opažanja. Brzina, kojom je došlo do prvog izdanja ovog prvog dijela Veginog udžbenika, dokazuje, da je glavni dio tog djela pripremao već kao navigacioni inženjer.

Drugo njegovo djelo izašlo je godinu dana kasnije. To je bila znamenita 1783. godina, kad su doštampani Vegini logaritmi na 7 decimala u 2.000 primjeraka pod naslovom »Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln«. Sigurno nije pretjerano, kad sam označio 1783. godinu znamenitom. Ona znači početak niza izdanja Veginih tablica u raznim formatima (mali, srednji, veliki) i na raznim jezicima (njemačkom, latinskom, engleskom, francuskom, talijanskom, holandskom, ruskom). Sa sigurnošću možemo tvrditi, da je do danas izašlo preko 100 izdanja Veginih logaritama. A kod nas, na užem nacionalnom teritoriju i na Veginom materinjem jeziku? Nažalost nijedno. Izgleda, da je tome tako i na širem nacionalnom teritoriju; on je slabo poznat kao naučni radnik među stručnim krugovima Hrvata* i Srba, a još manje u širem krugu intelektualaca.

Prvo izdanje Veginih logaritama sadrži Briggsove logaritme običnih brojeva od 1 do 100500 i logaritme trigonometrijskih funkcija na 7 decimala, tablice goniometrijskih funkcija, kvadrate i kubuse običnih brojeva i razne druge tablice i zbirke formula. Vega je toliko bio uvjeren u preciznost svoga rada, da je onome, koji ga prvi upozori na pogrešku, nudio jedan zlatnik za svaku. Samo mu se dvaput za života desilo da je morao iskupiti taj poziv, o čemu govori u jednoj bilješci iz 1784. (2. dio predavanja). O Veginim logaritmima bit će još govora.

Treće Vegino djelo je drugi dio predavanja iz matematike. Ono je izašlo 1784. godine. U naslovu kaže: »... die theoretische Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, die Anfangsgründe der praktischen Geometrie, eine Abhandlung von krummen Linien, und die Differenzial- und Integralrechnung enthaltend«. Drugi dio predavanja nadmašio je po broju izdanja prvi dio; izašlo je, naime, u 8 izdanja. Taj dio predavanja sadrži gradivo, koje se sada predaje u višim razredima srednje škole. Ali za Vegino doba znači smjeli pothvat napisati udžbenik, u kojemu se tumače osnovi diferencijalnog i integralnog računa. Znači, da je Vega — prema ondašnjem stanju nauke — bio vrlo savremen. Svojim udžbenicima reformirao je tadanji program nastave artiljerijskih oficira, jer je u njega uveo algebarsku analizu i višu matematiku. Matematičar Kästner piše par godina prije pojave Veginih udžbenika (1778.), da je vrhunac znanja njemačkih artiljerista izvući treći korijen.

Kao vojnik Vega je napredovao 1784. godine u čin poručnika, a 1787. u čin kapetana. U to vrijeme je postavljen za profesora matematike u koru bombardira.

Godine 1788. javlja se Vega pred javnošću sa novim radom, t. j. sa trećim dijelom predavanja iz matematike, u kojem donosi mehaniku čvrstih tjelesa. Ovim daje povezani pregled iz matematike, fizike i srodnih nauka. Kod izvoda služi se stalno višom matematikom. Ta je knjiga doživjela 5 izdanja.

Godine 1789. prekida Vega teoretski rad. Tada je naime Austrija zaključila sa Rusijom ratni savez protiv Turske. Rusko-turske borbe počele su već 1787., a Austrija se pojavila na bojištu istom 1788. Vega zapovijeda 1789. u borbama pred Beogradom sa nekoliko baterija teških topova. Opaža, da su rezultati gađanja 100-funtnih topova, u koje su se toliko uzdali, lošiji od onih kod 60-funtnih topova. Vega određuje stanovita tehnička poboljšanja, kojih uspjeh nije izostao. Nakon jednodnevnog bombardiranja, Turci su bili prisiljeni predati beogradsku tvrđavu.

---

* Prof. D. Pejnović upozorio me, da se Vega spominje: 1) u knjizi Kučere, Općena aritmetika i algebra (1899. godine, str. 274); govori se o Thesaurusu, 2) u Majcenovim logaritmičkim tablicama.

Ovaj pad Beograda opjevala je slovenska narodna pjesma »Stoji, stoji tam Beli grad...«, a o Vegi se tada pripovijedalo, da je bio otišao jednog dana u prednje opkope, koji su bili izloženi neprijateljskoj vatri, a kad se nakon 2 sata nije vratio poslali su stražu da ga potraži. Straža ga je našla kako usred neprijateljske vatre spokojno sjedi zadubljen u račune.

Malo iza pada Beograda odlazi u Moravsku u rat protiv Prusa. Tu ostaje skoro dvije godine. Na frontama nije prekinuo sa svojim stručnim naučnim radom. Za to je vrijeme izradio »Beylage zum 3-ten Bande der Vorlesungen über die Mathematik«, koji je rad izašao 1790. Zatim je spremao drugo izdanje trećeg dijela predavanja iz matematike. Godine 1792. nalazio se Vega — tada već major — kratko vrijeme u Beču, zadubljen u svoje naučne radove. Iste godine je upućen u Alzaciju na frontu protiv Francuza.

Godine 1793. izlazi priručnik logaritama pod naslovom »Manuale logarithmico-trigonometricum matheseos studiosorum commodo in minorem Vlacci, Wolfii, aliarumque hujus generis tabularum logarithmico-trigonometricarum mendis passim quam plurimis scatentium locum substitutum.« Pored latinskog dane su ovdje upute i na njemačkom jeziku. Ovaj priručnik je izašao u Lipskom (Leipzigu). Uspjeh prvih logaritamskih tablica iz 1783. godine naveo ga je, kako sam izjavljuje, na to, da priredi za primijenjenu matematiku potrebnu i savršenu zbirku tablica i formula, kako bi za dogledno vrijeme bilo suvišno da se matematičari bave novom obradom slične vrsti. Manuale smatraju malim logaritmičkim tablicama. Godine 1894. izašlo je njihovo sedamdeset i peto njemačko izdanje.

10. listopada 1793. godine završio je »Manuale«. Tri dana iza toga pokazao je svoje sposobnosti u novom svijetlu: vidimo Vegu kao vojnika i diplomatu. Fronta se nalazila na Rajni. Tvrđava Lauterburg predala se bez krvi nakon smjelog ličnog nastupa Vege. Kao komandant opsadne artiljerije on je sam, bez pratnje, jašio do gradskih vratiju i uspio nagovoriti posadu na dobrovoljnu predaju tvrđave.

Mjesec dana kasnije dokazao je svoje vojničke sposobnosti zauzećem ključne tvrđave Vauban, koju su Francuzi smatrali neosvojivom. Iste godine bio je Vega za svoj naučni rad osobito odlikovan: Društvo znanosti u Göttingenu izabralo ga je za dopisnog člana.

Velika knjiga logaritmičkih tablica izašla je godine 1794. pod naslovom: »Thesaurus logarithmorum completus ex arithmetica logarithmica, et ex trigonometria arteficiali Adriani Vlacci collectus, sublatis quam plurimis erroribus in novum ordinem redactus et auctus etc.«. Ova knjiga obuhvaća 713 stranica, a sadrži obilje gradiva kao: dekadske logaritme od broja 1 do 101000 na 10 decimala, logaritme trigonometrijskih funkcija na 10 decimala (od kuteva 0^0 do 2^0 za svaku sekundu, kasnije za svakih 10 sekundi), Wolframovu tabelu prirodnih logaritama prim brojeva na 48 decimala i t. d. U stvari se radi o novo preračunatim Vlacqovim tablicama, iz kojih je otstranio mnogo pogrešaka. Važnost »Thesaurusa« bila je tako velika, da je talijanski vojno-geografski zavod u Firenci godine 1896. knjigu cinkografirao i nanovo izdao.

Godine 1794. nalazio se Vega na fronti na Rajni protiv Francuza. I te se godine odlikovao prisutnošću duha spašavanjem skoro izgubljene austrijske artiljerije.

Iduće godine (1795) izašla je zbirka Veginih logaritamskih tablica srednje veličine u dva sveska. Pored logaritama običnih brojeva i trigonometrijskih funkcija na 7 decimala sadržavaju i prirodne logaritme na 8 decimala te opsežnu zbirku matematičkih formula, naročito za integriranje. Zatim sadrže preglednu tablicu svih prim brojeva do 400.000. Te godine izlazi i Vegina studija (Détermination de la demicirconférence d'un cercle dont le diamètre est...« Djelo je izašlo u Act. Acad. Petrop. IX.

I godine 1795. nalazi se na bojištu. Po Veginim nacrtima izgradili su tada 2 topa od po 9 cola, koji su bili daleko bolji od austrijskih topova od po 30 i 60 funti, jer im je domet bio 2 do 6 puta veći. Ti su topovi odigrali važnu ulogu kod opsade Mainza 1795. radi čega je bio predložen za najviše odlikovanje. Te mu je godine pruski kralj stavio sjajnu ponudu ako prijeđe u službu njegove vojske.

Godine 1796. sudjeluje u ponovnim borbama za Mainz, bori se kod Wiesbadena, na rijeci Dietz, za tvrđavu Kehl. Ta je godina za nauku bila izgubljena.

Krajem 1797. izabran je članom matematičko-fizikalnog društva u Erfurtu. U tom društvu čita 2. siječnja 1798. svoju raspravu pod naslovom »Mathematische Betrachtung über eine sich um eine unbewegliche Achse drehende Kugel in Beziehung zu unserem Erdsphaeroid«, koja je štampana iste godine u Erfurtu.

Godine 1799. izabran je članom Akademije korisnih znanosti u Mainzu, a slijedeće godine članom pruske Akademije znanosti u Berlinu, te članom češkog naučnog društva u Pragu.

Godine 1800. izlazi četvrti dio predavanja iz matematike, koji obrađuje hidromehaniku (hidrostatika, aerostatika, hidraulika, gibanje čvrstog tijela u tekućem mediju). Knjigu je posvetio kranjskim staležima, sjetivši se tom prilikom ljubljanskog liceja. Kao da je osjećao približavanje smrti, te se u mislima vraćao ishodištu svoga rada i života. Knjiga je doživjela samo 2 izdanja. Te godine izlazi i rasprava: »Versuch über die Enthüllung eines Geheimnisses in der bekannten Lehre von der allgemeinen Gravitation«. Te su ga godine počastili i austrijski krugovi time, što su mu dali titulu baruna.

Slijedeće godine publicirao je raspravu »Disquisitio de supputatione massarum corporum coelestium«, u kojoj je opisao metodu, kojom se može odrediti masa nebeskih tjelesa, ako su poznate njihove međusobne udaljenosti i trajanje njihovog kruženja.

Pored ponovnih izdanja prvog i drugog dijela predavanja iz matematike, završio je i dao u štampu par dana prije svoje smrti djelo »Natürliches aus der wirklichen Grösse unserer Erdkugel abgeleitetes, in ganz Frankreich und in einigen angrenzenden Ländern zum allgemeinen Gebrauch gesetzmässig eingeführtes Mass- und Münz-System«. Ono je izašlo istom 1803. Ovom se radnjom pokazao kao učenjak, koji je pristupačan idejama svakog tehničkog napretka.

Tragičan svršetak Vege do danas nije razjašnjen; većinom su to nagađanja bez stvarne podloge. Zna se, da su ga našli mrtvog 17. rujna 1802. godine u jednom rukavu Dunava kod bečkog Nussdorfa. Tankim konopom bilo je tijelo vezano uz kolac, koji je virio iz vode.

O privatnom životu Vege poznato je vrlo malo. Zna se da je bio oženjen, te da je imao najmanje dvoje djece. Smrću Vegine djece njegov je rod izumro. Do godine 1834. umrle su i njegove tri sestre.

Slavljen u čitavom svijetu, naš zemljak Jurij Vega zauzima u stručnoj literaturi odlično mjesto. Čak je i jedno brdo na mjesecu prozvano njegovim imenom. Realka u Idriji otkrila mu je skromno poprsje 1903. godine, no 1932. godine su ga odnijeli talijanski fašisti. Spomenik u Moravčama podigla su 1907. godine dvojica Veginih obožavalaca iz Beča. Stručni i naučni Vegini radovi nalaze se samo djelomično u Sveučilišnim knjižnicama u Zagrebu i Ljubljani. Budući da se približavamo 200-toj godini Vegina rođenja i 150-oj godini njegove smrti, možda ne bi bilo suvišno razmotriti mogućnost da se izdaju u njegovu spomen njegovi cjelokupni radovi.

Narodi koji sami dovoljno ne cijene svoje velikane ne mogu očekivati da će ih drugi poštivati.

LITERATURA O VEGI

[1] Notizen über Georg F. v. Wega; Anhang zum Jahresberichte über das Landesmuseum im Herzogthume Krain 1838, Ljubljana 1838.

[2] Peternel Mihael, Georg F. v. Vega, Zweiter Jahresbericht der k. k. Vollständigen Unterrealschule in Laibach, Ljubljana 1854.

[3] Hauptmann Fr., Jurij Vega, Spomenik o šestoletnici začetka habsburške vlade na Slovenskem, 167—194, Matica Slovenska 1883.

[4] Hauptmann Fr. Jurij Vega, Izvestje muzejskega društva za Kranjsko, L. XII, 37—48. Ljubljana.

[5] Kaučić Fridolin, Jurij Vega, predavanje u bečkoj »Zvezdi« 6. III. 1904. Ljubljana 1904.

[6] Doehlemann Karl, Georg v. Vega: historisch literarische Abhandlung; Zeitschrift für Mathematik und Physik, g. Leipzig, 1894.

[7] Vrečko Andrej, Jurij Vega, Kres IV, Celovec 1884.

[8] Vidic Fran, O Vegovoj smrti; Ljublj. Zvon. XXIV; Ljubljana 1904.

[9] Pirnat Makso; Juri baron Vega, slovenski junak in učenjak, Koledar družbe Sv. Mohorja, Celovec 1906.

[10] Pirnat Makso, Slavnostni govor ob odkritju Vegovega spomenika v Moravčah 16-IX-1907; Gorenjec VIII (1, Kranj 1907).

[11] Sever Josip, Vega in Gauss. Kat. obzornik IX/1905.

[12] Cantor Moritz, G. Vega; Allgemeine Biographie XXXIX; Bd. Lfr. 1, Leipzig 1895.

[13] Leber Max, Tabularum ad faciliorem et breviorem, in Georgii Vegae »Thesauri Logarithmorum« magnis canonibus, interpolationis computationem utilium Trias; Vindobonae 1897.

[14] Agostini A., L'invenzione dei logaritmi; Periodico di matematiche, serie IV. vol. II. n. 2; Bologna 1922.

[15] F. Kaučič, Georg Freiherr von Vega; 2. izdanje, Beč 1904.

[16] L. Čermelj, J. Vega, ob 150-letnici Vegovega logaritmovnika; Življenje in svet XIV, Ljubljana 1933.

PRIMJEDBA ČLANKU »KVADRATURA KRUGA« U MATEMATIČKOJ ČITANCI

Godine 1947. izašao je u Matematičkoj čitanci moj članak »Kvadratura kruga«. Govoreći u tom članku o broju π napisao sam između ostalog i ovo:

»Zanimljiva je jedna metoda, kako se može empirički ustanoviti vrijednost broja π. Zamislimo šahovsku ploču i jednu iglu, koja je tako duga kao stranica jednog kvadrata na šahovskoj ploči. Ona će katkada pasti unutar kvadrata tako, da ne će sjeći stranice tog kvadrata. Izračunalo se, da je vjerojatnost, da se to dogodi $p = \pi - 3$ t. j. u 100 pokusa otprilike 14 puta bi igla morala pasti unutar kvadrata. Pokusi, koji su izvršeni, potvrdili su ispravnost toga, što više kod 10000 pokusa našlo se, da je vjerojatnost, da će igla pasti unutar kvadrata $p = 0{,}142$, a kako je $0{,}142 = \pi - 3$, to odavde slijedi $\pi = 3.142$, t. j. pomoću tih pokusa izračunat je π na 3 decimale točno.«

Povodom ove primjedbe u mom članku, obratio se na mene Simon Četković, profesor u Beogradu, i skrenuo mi pažnju, da je po njegovom računu gore navedena vjerojatnost $p = (\pi - 3) / \pi$, a ne $p = \pi - 3$, kao što sam to tvrdio.

Ta primjedba Simona Četkovića ponukala me, da istražim, odakle sam došao do navedenih podataka. Našao sam, da sam ih uzeo iz knjige Beutel, Die Quadratur des Kreises, Mathematische Bibliothek, Leipzig-Berlin, **1913** na str. 51. Prekontroliravši Četkovićev izvod, našao sam, da on ima pravo, što više, našao sam da je u izdanju Beutelove knjige iz godine **1942.** ta pogreška ispravljena. Izgleda, da je pogreška u Beutelovoj knjizi nastala na taj način, da je taj podatak Beutel uzeo iz knjige Schubert, Mathematische Mussestunden, Leipzig **1909**, str. 209, gdje je također navedeno, da je ta vjerojatnost $p = \pi - 3$.

Spomenuo bih s time u vezi, da je Ivo Lah u Glasniku Udruženja aktuara godine 1938. (II. godište str. 72) napisao članak pod naslovom »Statistično-verjetnostna kvadratura kroga s pomočjo šahovske deske in šivanke«. U tom članku Lah spominje vjerojatnost, koja je izračunata u gore citiranoj Schubertovoj knjizi i spominje, da je kušao prekontrolirati taj rezultat i da je našao, da bi ta vjerojatnost morala biti $p = (\pi - 3) / \pi$.

Ujedno Lah spominje, da je godine 1933. Franjo Lavrih, namještenik OUZD-a u Ljubljani načinio sa šahovskom tablom i iglom 1000 pokusa i igla je pala 47 puta unutar kvadrata, što odgovara gore navedenoj vjerojatnosti.

U smislu prednjih izlaganja, mole se čitaoci, da navedenu pogrešku u mom članku u Matematičkoj čitanci isprave.

Dr. Vladimir Vranić

THE AIR ALMANAC 1950

London, H. M. Stationary Office, 1949.

Prvo godište Air Almanaca izašlo je već 1937. godine, ali od onda do danas izmijenio se sadržaj u više mahova. Ovdje ćemo prikazati najnoviji A. A. i pri tome ukazati na glavnu razliku između njega i drugih efemerida.

Kako sam naslov kaže, A. A. namijenjen je u prvom redu vazduhoplovcu. Ovome, kao i pomorcu, potrebni su podaci o deklinaciji δ i Griničkom satnom kutu (*GHA*) nebeskih tjelesa, kako bi se za neki približno poznati geografski položaj mogli izračunati, ili jednostavno oduzeti iz Astr. Nav. tablica, visina *Alt* i azimut *Az* i konačno, po metodi pozicionih linija, odrediti točniji geografski položaj.

U običnim astr. efemeridama nije uopće označen *GHA* nego ovaj treba odrediti pomoću jednadžbe vremena (kod motrenja Sunca) ili iz zvjezdanog vremena i rektascenzije (kod drugih nebeskih tjelesa), pri čemu treba pretvarati jedno vrijeme u drugo, a onda u lučnu mjeru i t. d. U nekim nautičkim astr. efemeridama, kao što je na pr. naš »Nautički godišnjak« ili američki »Nautical Almanac« ima pored δ i podataka o *GHA*, u lučnoj mjeri. U tom pogledu su dakle ovi godišnjaci podesniji od običnih efemerida, ali kod njihove upotrebe treba ipak prilično interpolirati, jer su vrijednosti *GHA* označene samo za svako 2 sata ili u najboljem slučaju (u američkom N. A., za Mjesec) za svaki sat, a za planete čak samo za 0^h Gr. vremena.

Air Almanac donosi δ Sunca i većih planeta za svaki sat, δ Mjeseca za svako 10 m, a *GHA* svih tih tjelesa za svako 10 min. i to u lučnoj mjeri. Za manje intervale dodaje se tabuliranim vrijednostima *GHA* korekcija, prema posebnoj skrižaljci. Za zvijezde stajačice nije tabuliran njihov *GHA*, nego mjesto toga ima Grinički satni kut proljetne točke ($GHA\,\Upsilon$) opet od 10 na 10 min., s korekcijom za manje intervale. To je identično s Grinič. zvjezd. vremenom, izraženim u lučnoj mjeri. Sam Grin. sat. kut zvijezde ($GHA\,\ast$) proizlazi iz zbroja $GHA\,\Upsilon$ i veličine (360^0 — A. R.^{0}), koja je u Air Almanacu označena simbolom $SHA\,\ast$. Ta veličina predstavlja satni kut zvijezde (u lučnoj mjeri), računat od meridijana kroz proljetnu točku, a u smjeru od juga prema zapadu. Mjesni satni kut u lučnoj mjeri može se dakle naći na jednostavni način iz odnosa:

$$LHA \ast = GHA\,\Upsilon + SHA \ast \pm \lambda^{E}_{W} \quad \text{za zvijezde stajačice;}$$

ili $$LHA = GHA \pm \lambda^{E}_{W} \quad \text{za Sunce, Mjesec i planete.}$$

A. A. izlazi sada u 3 sveska svake godine, a svaki svezak obuhvaća po 4 mjeseca. Za to razdoblje se uzima da su δ i $SHA\,\ast$ zvijezda konstantni.

Točnost podataka u A. A. jest $\pm 0',5$ kao i u Astr. Nav. Tabelama.

Dr. Andro Gilić

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

ODRŽANI KOLOKVIJI

1) 4. I. 1950. *Prof. S. Škreblin:*
O isprepletenosti korjena kvadratnih jednadžbi.

U predavanju se dokazuje, da je nužni i dovoljni uvjet za to, da dvije kvadratne funkcije $f_1(x)$ i $f_2(x)$ imaju isprepletene korijene t. j. da je

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2 \quad \text{ili} \quad \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_2 < \beta_1$$

taj, da rezultanta tih dviju funkcija ispunjava uvjet

$$R = (a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1) < 0 .$$

To izlazi neposredno iz slijedeće relacije, koju je autor izveo

$$R = a_2^2 f_1(\alpha_2) f_1(\beta_2) = a_1^2 f_2(\alpha_1) f_2(\beta_1) .$$

Zatim se pokazuje, kako se određuje međusobni položaj korjena obiju funkcija f_1 i f_2, kad je $R > 0$. Izložena teorija primjenjuje se napokon na mijenjanje međusobnog položaja korjena, kao i na rješavanje nejednadžbi

$$f_1(x) \gtrless 0, \; f_2(x) \gtrless 0, \; \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \gtrless 0.$$

gdje u funkcijama f_1 i f_2 dolazi promjenljivi parametar λ.

2) 11. I. 1950. Stručno-pedagoško veče:
Dr. B. Marković:
Demonstracija pokusa iz elektromagnetizma.

3) 18. I. 1950. *Prof. D. Grdenić: Ispitivanje kristalne strukture nekih organskih živinih spojeva.*

(Kolokvij prikazan u članku D. Grdenić: Faktor apsorpcije kod difrakcije rentgenskih zraka na monokristalu, Glasnik, T. 4, (1949), str. 149—172).

4) 25. I. 1950. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:
a) *Dr. N. Saltikov: Red sistema diferencijalnih jednačina,*
b) *Dr. ing. F. Havliček: O Stokesovim i Gerstnerovim valovima,*
c) *Dr. ing. D. Blanuša: O Eratostenovom situ.*

5) 1. II. 1950. *Dr. Đ. Kurepa:*
Skupovi kao brojevi i brojevi kao skupovi.

Predavač pokazuje, kako uz izvjesne uslove svaki skup može igrati ulogu broja (kardinalni brojevi): napose, polazeći od konačnih skupova, mogu se tako definirati prirodni brojevi. Racionalni brojevi definiraju se kao uređene trojke prirodnih brojeva.

Redni brojevi definiraju se kao skupovi S racionalnih brojeva, koji imaju svojstvo, da za svaki racionalni broj $\frac{1}{n}$ onaj dio skupa S, koji sadrži brojeve iz S sa međusobnim razmakom $\leq \frac{1}{n}$, ima veću potenciju nego preostali dio skupa S.

6) 8. II. 1950. Stručno-pedagoško veče:
Prof. M. Sevdić: Formalizam u nastavi matematike.

7) 15. II. 1950. *Prof. M. Vučkić:*
Polinomi Čebiševa u teoriji aproksimacije.

(Kolokvij prikazan u članku M. Vučkić: Polinomi Čebiševa, Glasnik, T. 4, (1949), str. 209—220).

8) 22. II. 1950. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Prof. V. Glaser: Odnos Hermitovih polinoma i Fourierovog integralnog teorema,*

b) *Dr. V. Niče: Dokaz i nadopuna Appellovog stavka o nožišnim krivuljama Plückerovog konoida,*

c) *Prof. S. Škarić: O pravljenju paraboličnih ogledala pomoću rotacije tekućine,*

d) *Dr. ing. D. Blanuša: O jednoj relaciji među kvadratičnim matricama.*

Tajnik: Z. Janković

PRIMLJENE PUBLIKACIJE

U zamjenu za Glasnik Društvo je primilo ove časopise:

1. Archives des sciences, V. 2 F. 1 (1949), Genève,
2. Arkiv för matematik B. 1. — H. 1. 1949. Stokholm,
3. Arkiv för fysik B. 1. — H. 1. i H. 2. 1949. Stokholm,
4. Bulletino della Unione matematica italiana, N. 3 (1949),
5. Bulletin de la Société royale des sciences de Liège, N. 10 (1949),
6. Časopis pro pěstovani matematiky a fysiky, roč. 74., čis. 4 (1949), Praha,
7. Duke Mathematical Journal, V. 16, n. 1, 2 (1949), Durham, N. C.,
8. Journal of the Mathematical Society of Japan, V. 1 no 2 (1949), Tokyo,
9. Mathematical Reviews, V. 10 n. 7, 8 (1949), Providence, USA.
10. Osaka Mathematical Journal, V. 1 n. 1 (1949) Osaka,
11. Rendiconti del Seminario Matematico, Padova, 1949,
12. Rozhledy matematicko-prirodovědecké, roč. 29., čis. 1. Praha.

RJEŠENJA ZADATAKA 85, 86, 99 i 134*

85. Na površini $az = xy$ jedna pokretna tačka polazi iz tačke A $(a, 0, 0)$ sa brzinom $(0, a, a)$. Znajući da se vrh njenog vektora akceleracije kreće po osi Oz, odrediti kretanje i poluprečnik krivine trajektorije.

Zadatak zajedno s rješenjem dostavio D. Mitrović.

Rešenje: Pošto se tačka M kreće tako, da se vrh Γ njenog vektora akceleracije $\overrightarrow{M\Gamma}$ kreće po osi Oz, geometrijski zbir $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{M\Gamma}$ daje jedan drugi vektor koji se nalazi na osi Oz. Dakle,

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}.$$

Pomoću ustanovljene vektorske jednakosti, možemo sada odrediti relacije između komponenata ovih vektora na osama Oz i Oy. Imamo

$$x + x'' = 0; \quad y + y'' = 0.$$

Opšti integrali tih jednačina jesu

$$x = \lambda \cos t + \mu \sin t,$$
$$y = \lambda_1 \cos t + \mu_1 \sin t,$$

gde su λ, λ_1, μ, μ_1 integracione konstante.

Vodeći računa o početnim uslovima određujemo integracione konstante i dobijamo

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

Vrednost kote z je određena činjenicom da se M kreće po površini $az = xy$. Dakle $z = a \sin t \cos t$.

Prema tome, zakon kretanja tačke M definisan je jednačinama

$$x = a \cos t,$$
$$y = a \sin t,$$
$$z = a \sin t \cos t,$$

koje pretstavljaju trajektoriju tačke M u parametarskom obliku. Za poluprečnik krivine trajektorije dobijamo:

$$R = a \cdot \frac{(1 + \cos^2 2\,t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2 + 3 \sin^2 2\,t}}\,.$$

86. S kojom se česticom sudarila α-čestica, ako mjerenjem na slici dobivenoj pomoću Wilsonove komore ustanovimo, da je α-čestica nakon sraza otklonjena od prvobitnog svog smjera za kut $38^0\,34'$, a smjer otklona nepoznate čestice prema prvobitnom smjeru α-čestice iznosi $50^0\,53'$?

Zadatak zajedno s rješenjem dostavio D. Mayer, Zagreb.

Oznake: $\vec{v}$ brzina α-čestice prije sraza, $\vec{v}'$ njena brzina nakon sraza, $\vec{v}''$ srazom dobivena brzina nepoznate čestice, ϑ_1 otklon α-čestice, a ϑ_2 otklon nepoznate čestice prema prvobitnom smjeru α-čestice.

Iz stavka o održanju veličine gibanja i stavka o održanju energije dobijemo:

$$m_1 v' \cos \vartheta_1 + m_2 v'' \cos \vartheta_2 = m_1 v$$

$$m_1 v' \sin \vartheta_1 - m_2 v'' \sin \vartheta_2 = 0$$

$$m_1 v'^2 + m_2 v''^2 = m_1 v^2 .$$

Pomoću prvih dviju jednadžbi izrazimo v' i v'' kao funkcije od v, pa dobivene izraze uvrstimo u treću jednadžbu. Dobijemo

$$\frac{\sin^2 \vartheta_2}{\sin^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} + \frac{m_1 \sin^2 \vartheta_1}{m_2 \sin^2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)} = 1.$$

Iz toga izraza slijedi

$$m_2 = m_1 \frac{\sin \vartheta_1}{\sin (\vartheta_1 + 2\vartheta_2)} .$$

Ovdje je m_1 masa α-čestice, $\vartheta_1 = 38^0\, 34'$, $\vartheta_2 = 50^0\, 53'$, pa je

$$m_2 = m_1 \frac{\sin 38' 34'}{\sin 39' 40'} .$$

Vrijednost razlomka jednaka je približno 1, pa je

$$m_2 \approx m_1 .$$

Nepoznata čestica je jezgra helija.

99. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[7]{x^3 (1 - x^2)^2}}\, dx = ?$$

Dostavio Đ. Kurepa; riješio D. Mitrović, Zagreb.

Posmatrajmo višeznačnu funkciju

$$f(z) = \frac{z^{2n}}{\sqrt[7]{z^3 (1 - z^2)^2}} :$$

z prolazi kompleksnim brojevima. Njene kritične tačke su $z = 0$ i $z = \pm 1$. Izvan konture c (gl. sliku), koja opkoljava segment [—1, +1] funkcija $f(z)$ je uniformna.

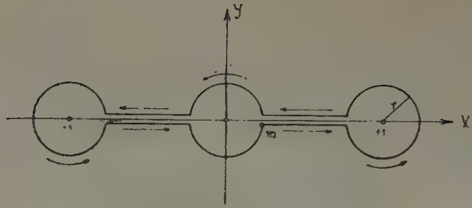
Kad oko koordinatnog početka opišemo bilo kakav krug Γ radiusa većeg od 1, tada je

$$\int_C f(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz ;$$

specijalno to važi za krugove sa vrlo velikim radiusom, što se još piše u obliku

$$\int_C f(z)\, dz = -2\pi i\ R(\infty)$$

gdje nam $R(\infty)$ znači ostatak (residuum) funkcije f u tački $z = \infty$.



Polazeći iz točke m sa determinacijom

$$f(z) = \frac{x^{2n}}{\sqrt[7]{x^3(1-x^2)^2}} = f(x)$$

u pozitivnom smislu i uzimajući da $r \to 0$, dobijamo

$$\int_C f(z)\,dz = \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{e^{\frac{4\pi i}{7}}} \int_1^0 f(x)\,dx + \frac{1}{e^{\frac{4\pi i}{7}}\,e^{\frac{3\pi i}{7}}} \int_0^{-1} |f(x)|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{e^{\frac{4\pi i}{7}}\,e^{\frac{3\pi i}{7}}\,e^{\frac{4\pi i}{7}}} \int_{-1}^0 |f(x)|\,dx$$

ili, označavajući sa I vrijednost datog integrala:

$$I - \frac{1}{\varepsilon} I + I - \frac{1}{\varepsilon} I = -2\pi i\, R(\infty)$$

(1) $$2I\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = -2\pi i\, R(\infty), \quad \text{gdje je} \quad \varepsilon = e^{\frac{4\pi i}{7}}.$$

Integrali od $f(z)$ duž lukova malih krugova su iščezli, jer je

$$\lim_{|1-z|\to 0} |(1-z)f(z)| = 0, \quad \lim_{|z|\to 0} |z \cdot f(z)| \quad \text{i} \quad \lim_{|1+z|\to 0} |(1-z)f(z)| = 0.$$

Prema tome, ostaje nam da izračunamo $R(\infty)$ funkcije $f(z)$. Radi toga stavimo $z = \frac{1}{u}$ pa imamo

$$f(z) \equiv f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u^{2n-1}}(u^2-1)^{-\frac{2}{7}} = \frac{1}{u^{2n-1}}(-1)^{-\frac{2}{7}}(1-u^2)^{-\frac{2}{7}} =$$

$$= \frac{1}{u^{2n-1}} e^{-\frac{2\pi i}{7}} (1-u^2)^{-\frac{2}{7}} = \frac{e^{-\frac{2\pi i}{7}}}{u^{2n-1}}\left[1 + \frac{2}{7}u^2 + \frac{2\cdot 9}{7\cdot 14}u^4 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{2\cdot 9\cdot 16\ldots(7n-5)}{7\cdot 14\cdot 21\ldots 7n} u^{2n} + \ldots\right].$$

Koeficijent uz u, ali sa promijenjenim znakom, je vrijednost traženog ostatka. Dakle,

$$R(\infty) = -\frac{2 \cdot 9 \cdot 16 \ldots (7n-5)}{7 \cdot 14 \ldots 7n} e^{-\frac{2\pi i}{7}}. \tag{2}$$

Prema (1) i (2) imamo:

$$I = \pi i \frac{2 \cdot 9 \cdot 16 \ldots (7n-5)}{7 \cdot 14 \cdot 21 \ldots 7n} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{7}} - e^{-\frac{2\pi i}{7}}}$$

što pomnoženo sa $\frac{2i}{2i}$ konačno daje traženi rezultat:

$$I = \frac{\pi}{2 \sin \frac{2\pi}{7}} \cdot \frac{2 \cdot 9 \ldots (7n-5)}{7 \cdot 14 \ldots 7n}.$$

134.* Za stolom je sjedilo društvo od nekoliko lica, među kojima A i B. A se potuži kako su mu prepuni džepovi sve samih dvodinarki. Na to će B predložiti ovu zagonetku, na osnovu koje će on zaključiti koliko A ima dvodinarki u džepovima. Neka A vadi sve po dvije dvodinarke, od kojih jednu neka meće na hrpu, na sredinu stola, a drugu daje svojem desnom susjedu na dalju raspodjelu. Ako mu najzad ostane jedna dvodinarka, neka nju metne pred sebe na stol; ako pak i kod zadnjeg vađenja ima dvije dvodinarke, neka to naznači time, da pred sebe stavi jednu šibicu. Sad će s raspodjelom započeti onaj iz društva, koji je primio novac; uzimat će svaki put po dva komada: jedan meće na hrpu u sredinu, a drugi daje svojem desnom susjedu. Ako mu najzad ostane jedan komad, neka ga stavi pred sebe; ako mu ne ostane dvodinarka, neka pred sebe stavi šibicu. Stvar se nastavlja sve do kraja: svaki od učesnika do kojih dođe tako novac neka ga razdijeli na taj način, što će istodobno jednu dvodinarku metnuti na hrpu u sredinu stola, a drugu predati svojem desnom susjedu; ako mu najzad ostane (ne ostane) jedna dvodinarka, neka tu dvodinarku (jednu šibicu) metne pred sebe i to neposredno desno od one dvodinarke, odnosno šibice što ju je maloprije bio tu stavio, ako je slučajno već imao prilike da razvrstava dvodinarke.

Kad se zatim B udaljio, A je započeo s raspodjelom kako je bio predložio B; svi su se pritom pitali kako će B odgonetnuti koliko je A imao dvodinarki, sklonili su novac sa sredine stola i pozvali B-a. B je ušao, pogledao šta sve stoji pred pojedinim članom društva i nakon kraćeg razmišljanja odgonetnuo koliko je dvodinarki imao A. Kako?

Zadao Đ. Kurepa, Zagreb; riješili: Ing. A. Tripalo, prof., Novi Sad; Aganović Ibrahim, uč., Banja Luka; M. Marjanović, uč. VII. r., Nikšić; Molnar Geza, uč., Novi Sad; Dadić Žarko, stud., Split.

Navest ćemo ovdje opću shemu rješavanja toga zadatka, jer se uglavnom sva poslana rješenja u principu dadu svesti na nju. Pretpostavimo da je A imao u početku x dvodinarki. Nakon prve diobe njegov desni susjed dobio je x_1 dvodinarki, te je $x=a_0+2x_1$, gdje a_0 ima vrijednost 0 ili 1 već prema tome da li je A stavio ispred sebe šibicu ili dvodinarku. Analogno je dalje

$$x_1 = a_1 + 2x_2, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1} + 2x_n, x_n = a_n + 2x_{n+1}.$$

Postepenim supstituiranjem od desna na lijevo dobijamo vrijednost

$$x = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \ldots + 2^n a_n.$$

Kao što je već napomenuto za faktore $a_0, a_1, \ldots, a_n$ treba uzeti 0 ili 1 već prema tome, da li se radi o šibici ili dvodinarki.

Uzmimo konkretan slučaj: B je ušao i vidio da je raspored dvodinarki odn. šibica, počevši od A pa nadesno, bio slijedeći *D, Š, Š, D, D, Š, D, D*. On je odmah znao da je A imao u početku

$$1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7$$

t. j. 217 dvodinarki.

ZADACI

140.* Kolik je koeficijent rastezanja za 1^0 Fahrenheitove skale? S tim u vezi neka se odredi stupanj apsolutne nule u toj skali.

(Dostavio *Đ. Pejnović*)

141. Dokaži, da je geometrijsko mjesto točaka na kugli, za koje je zbroj sfernih udaljenosti od dviju čvrstih točaka kugline plohe konstantan, sferni čunjosjek, t. j. spojnice središta kugle s točkama te krivulje čine čunj drugoga reda.

(Dostavio *D. Blanuša*)

142. Neka se ispita konvergencija odnosno divergencija izraza

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}, \quad x > 0.$$

(Dostavio *V. Devidé*)

SARADNICIMA »GLASNIKA«

Članke i dopise treba upućivati redakciji Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog, Zagreb, Marulićev trg 19.

Članci neka su jezično korigirani i pisani strojem sa proredom na jednoj strani papira. Uz svaki članak neka je priložen sadržaj na kojem od svjetskih jezika i to približno do jedne trećine opsega članka. Pri tom neka se formule iz članka u sadržaju ne ponavljaju. Zato treba u članku formule numerirati i u sadržaju se na njih pozvati. Glasniku se mogu poslati i članci na kojem stranom svjetskom jeziku. U tom slučaju neka se priloži sadržaj na hrvatskom jeziku. Autori iz inozemstva mogu poslati uz članak i sadržaj na svom jeziku. Taj će sadržaj uredništvo prevesti na hrvatski.

Autori dobivaju 50 separata besplatno.

AUX COLLABORATEURS DU »GLASNIK«

Les collaborateurs sont priés d'adresser les articles et la correspondance à la rédaction de »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, Zagreb, Marulićev trg 19.

Les manuscrits doivent être écrits à la machine avec interligne sur une côté de la feuille. Les formules doivent être numérotées afin d'éviter leur répétition dans le résumé. Les auteurs étrangers sont invités de rédiger le résumé dans leur langue, la rédaction se chargeant de le traduire en croate.

Les auteurs reçoivent à titre gratuit 50 exemplaires de tirages à part.

IZ REDAKCIJE

Rješenja zadataka, koja se šalju »Glasniku«, neka su pisana strojem ili čitljivo rukom na jednoj strani papira i to tako, da se rješenje svakog zadatka nalazi na posebnom papiru. Ako je uz rješenje potrebna slika, treba je nacrtati posebno, po mogućnosti na boljem papiru. Rješenja označena zvjezdicom objavit ćemo već u drugom narednom broju »Glasnika«. Te zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvih semestara. Neka se redakciji šalju i zadaci, ali samo originalni i sa pripadnim rješenjem.

OBAVIJEST

Matematičari, fizičari i svi ostali, koji se zanimate matematičko-fizičkim naukama, učlanite se u Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske.

Ovom broju Glasnika priložena je Prijavnica, koju ispunjenu traženim podacima treba poslati na adresu: Hrvatsko prirodoslovno društvo, Zagreb, Ilica 16/III (za Društvo matematičara i fizičara N. R. H.). Upisninu od Din 20.— i godišnju članarinu od Din 120.— pošaljite priloženom čekovnom uplatnicom. Članovi Društva dobivaju Glasnik besplatno.

Pravila Društva mogu se dobiti besplatno, ako ih zatražite na gornji naslov.

Na Glasnik se mogu pretplatiti i oni, koji nisu članovi Društva. Pretplata iznosi Din 120.— godišnje i šalje se priloženom čekovnom uplatnicom.

Molimo članove i pretplatnike da uredno plaćaju članarinu odnosno pretplatu.

Upozoravamo čitatelje, a naročito srednjoškolsku omladinu, da će Društvo matematičara i fizičara N. R. H. uskoro početi sa izdavanjem časopisa

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

Časopis će donositi članke i prikaze iz područja matematičko-fizičkih nauka, njihovih najnovijih postignuća i primjena, upute za ekspermentalni rad, zadatke i njihova rješenja i t. d. Svrha je časopisa da kod omladine pobudi i potakne zanimanje za matematičko-fizičke nauke i da pruži mogućnost proširivanja i produbljivanja znanja onih, koji se za njih interesiraju. Društvo zato poziva omladinu, naročito učenike srednjih škola, kao i sve ostale, koje zanimaju matematičko-fizičke nauke, da se na taj časopis pretplate.

Pojedinosti o časopisu i pretplati donijet ćemo u slijedećem broju.

Hrvatsko prirodoslovno društvo ponovno izdaje poznati svoj »Bošković«. Upravo je izašao iz štampe:

ALMANAH BOŠKOVIĆ

ZA GODINU 1950

u kojem se nalaze, uz opširni i iscrpni astronomski dio, i ovi članci:

Dr. Ž. Marković: **Rudje Bošković,**
Ing. N. Abakumov: **Astronomsko-geodetski radovi Rudjera Boškovića,**
Dr. D. Blanuša: **Teorija relativnosti,**
Dr. T. Pinter: **Lenjin i fizika na početku XX. stoljeća,**
Dr. B. Marković: **Mjerenje i mjere.**

Upozoravamo sve, koji se zanimaju astronomijom i prirodnim naukama, na ovu ediciju, koje će odsad redovito svake godine izlaziti.

Almanah se može dobiti u svim boljim knjižarama uz cijenu od Din 88.—. Članovi Hrvatskog prirodoslovnog društva mogu ga nabaviti u Društvu, Zagreb, Ilica 16/III kat uz člansku cijenu od Din 75.—.